

CAPÍTULO 6

ESTADO PLANO DE TENSÃO

Neste capítulo é descrita com pormenor a formulação de elementos finitos destinados à discretização de problemas de análise de estruturas que se enquadram no caso particular designado "Estado Plano de Tensão" [6.1]. Apresenta-se em primeiro lugar o caso do elemento finito quadrado de dimensões fixas, seguindo-se o elemento finito rectangular $L_1 \times L_2$ e, por último, o caso mais geral de geometria arbitrária.

A formulação aqui descrita baseia-se no método dos deslocamentos e na discretização do domínio em elementos finitos de n nós, apresentando algumas semelhanças com o que foi descrito no Capítulo 4.

6.1 - Simbologia

Apresenta-se em primeiro lugar um resumo da simbologia adoptada na formulação do método dos elementos finitos.

Tabela 6.1 - Simbologia relativa ao método dos elementos finitos.

L	Dimensão do elemento finito
n	Número de nós do elemento finito
x	Coordenada cartesiana
u	Campo de deslocamentos
a	Deslocamento nodal
h	Espessura do elemento finito laminar
\bar{x}	Coordenada cartesiana de um nó de um elemento finito
m	Número de direcções consideradas (no estado plano de tensão: $m = 2$)
N	Função interpoladora ou função de forma

c	Coeficiente de um termo de um polinómio
p	Número de graus de liberdade do elemento finito ($p = n \times m$)
ε	Extensão
γ	Distorção
L	Operador diferencial
q	Número de componentes do vector $\underline{\varepsilon}$ e do vector $\underline{\sigma}$
B	Matriz de deformação
V	Volume do elemento finito laminar
σ	Tensão normal
τ	Tensão tangencial
p	Acção exterior distribuída por unidade de comprimento
S	Superfície do elemento finito laminar
E	Módulo de elasticidade ou módulo de Young
ν	Coeficiente de Poisson
D	Matriz de elasticidade ($\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon}$)
K	Matriz de rigidez do elemento finito no referencial geral
F	Forças nodais equivalentes à acção exterior, nos graus de liberdade do elemento finito, no referencial geral
s	Coordenada local (curvilínea)
\bar{s}	Coordenada local de um nó de um elemento finito
N_V	Vector das funções interpoladoras ou funções de forma
J	Jacobiano da transformação
\bar{E}	Módulo de elasticidade num nó do elemento finito
$\bar{\nu}$	Coeficiente de Poisson num nó do elemento finito
\bar{h}	Espessura do elemento finito num nó

P	Posição de um ponto de Gauss ou ponto de amostragem
W	Peso (<i>weight</i>) associado a um ponto de Gauss ou ponto de amostragem
n_{Gp_i}	Número de pontos de Gauss associado à direcção s_i
J	Valor do integral calculado de acordo com a quadratura de Gauss

6.2 - Funções interpoladoras ou funções de forma

Na Figura 6.1 encontra-se representado um elemento finito quadrado com quatro nós e com dimensões $L_1 \times L_2 = 2 \times 2$.

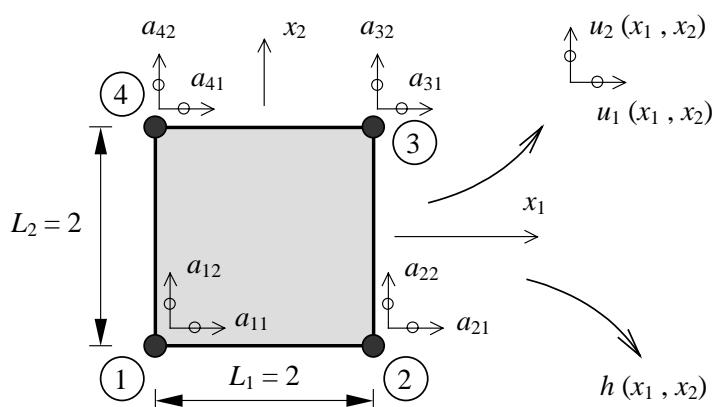


Fig. 6.1 - Elemento finito quadrado de quatro nós.

As coordenadas dos nós são armazenadas na matriz \bar{x} , cujo elemento genérico \bar{x}_{ij} corresponde à coordenada cartesiana do nó i segundo a direcção x_j .

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{11} & \bar{x}_{12} \\ \bar{x}_{21} & \bar{x}_{22} \\ \bar{x}_{31} & \bar{x}_{32} \\ \bar{x}_{41} & \bar{x}_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ +1 & -1 \\ +1 & +1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

De acordo com a simbologia atrás apresentada, a matriz \bar{x} tem dimensões $n \times m$.

A espessura do elemento finito laminar representado na Figura 6.1 é designada por h , que pode também ser uma função de x_1 e de x_2 .

A função $\underline{u}(\underline{x})$ corresponde ao campo de deslocamentos, verificando-se o seguinte

$$\underline{u}(\underline{x}) = \begin{cases} u_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (2)$$

Cada uma das componentes de $\underline{u}(\underline{x})$ é interpolada separadamente com base em funções de forma $N_i(x_1, x_2)$ e nos deslocamentos dos nós (ver a Figura 6.1)

$$u_1(x_1, x_2) = N_1(x_1, x_2) a_{11} + N_2(x_1, x_2) a_{21} + N_3(x_1, x_2) a_{31} + N_4(x_1, x_2) a_{41} \quad (3)$$

$$u_2(x_1, x_2) = N_1(x_1, x_2) a_{12} + N_2(x_1, x_2) a_{22} + N_3(x_1, x_2) a_{32} + N_4(x_1, x_2) a_{42} \quad (4)$$

Em (3) e (4), bem como na Figura 6.1, a_{ij} corresponde ao deslocamento do nó i segundo a direcção x_j . Note-se que o número de funções de forma N_i coincide com o número de nós do elemento finito (n).

As considerações que se seguem serão apenas efectuadas com a componente u_1 do campo de deslocamentos. A sua extensão à componente u_2 seria trivial.

A função $u_1(x_1, x_2)$ deve assumir nos nós os valores nodais do campo de deslocamentos. Atendendo às coordenadas dos nós indicadas em (1), pretende-se que

$$\begin{cases} u_1(-1, -1) = a_{11} \\ u_1(+1, -1) = a_{21} \\ u_1(+1, +1) = a_{31} \\ u_1(-1, +1) = a_{41} \end{cases} \quad (5)$$

Para que as condições expressas em (5) sejam respeitadas, as funções de forma a utilizar em (3) devem possuir as características indicadas na Tabela 6.2.

Tabela 6.2 - Características das funções $N_i(x_1, x_2)$.

Nó	1	2	3	4
(x_1, x_2)	$(-1, -1)$	$(+1, -1)$	$(+1, +1)$	$(-1, +1)$
$N_1(x_1, x_2)$	1	0	0	0
$N_2(x_1, x_2)$	0	1	0	0
$N_3(x_1, x_2)$	0	0	1	0
$N_4(x_1, x_2)$	0	0	0	1

As seguintes funções polinomiais respeitam as condições indicadas na Tabela 6.2, que consistem no facto da a função N_i ter de assumir um valor unitário no nó i e um valor nulo nos restantes nós.

$$\begin{cases} N_1(x_1, x_2) = (1 - x_1)(1 - x_2) / 4 \\ N_2(x_1, x_2) = (1 + x_1)(1 - x_2) / 4 \\ N_3(x_1, x_2) = (1 + x_1)(1 + x_2) / 4 \\ N_4(x_1, x_2) = (1 - x_1)(1 + x_2) / 4 \end{cases} \quad (6)$$

A função $N_1(x_1, x_2)$ pode tomar a seguinte forma

$$N_1(x_1, x_2) = 0.25 - 0.25x_1 - 0.25x_2 + 0.25x_1x_2 \quad (7)$$

Um polinómio de segundo grau completo tem a seguinte expressão genérica

$$f(x_1, x_2) = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \underline{c_3x_1^2} + c_4x_1x_2 + \underline{c_5x_2^2} \quad (8)$$

Comparando (7) com (8), verifica-se que a função de forma $N_1(x_1, x_2)$ é um polinómio de segundo grau incompleto, porque lhe faltam os termos que em (8) se encontram sublinhados. Considerações idênticas poderiam ser feitas em relação às restantes funções de forma.

Armazenando os deslocamentos nodais da seguinte forma

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{31} \\ a_{32} \\ a_{41} \\ a_{42} \end{bmatrix} \quad (9)$$

tem-se, atendendo a (3) e a (4)

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{31} \\ a_{32} \\ a_{41} \\ a_{42} \end{bmatrix} \quad (10)$$

que em notação matricial se reduz a

$$\underline{u} = \underset{(m \times 1)}{\underline{N}} \underset{(m \times p)}{\underline{N}} \underset{(p \times 1)}{\underline{a}} \quad (11)$$

sendo $p = n \times m$ (no caso da Figura 6.1, $p = 4 \times 2 = 8$).

A matriz \underline{N} é

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Os gráficos das funções $N_i(x_1, x_2)$, definidas em (6), encontram-se representados na Figura 6.2 (ver também a Figura 6.1).

No caso do elemento finito rectangular de dimensões $L_1 \times L_2$, representado na Figura 6.3, as funções de forma seriam

$$\begin{cases} N_1(x_1, x_2) = \frac{1}{L_1 L_2} \left(\frac{L_1}{2} - x_1 \right) \left(\frac{L_2}{2} - x_2 \right) \\ N_2(x_1, x_2) = \frac{1}{L_1 L_2} \left(\frac{L_1}{2} + x_1 \right) \left(\frac{L_2}{2} - x_2 \right) \\ N_3(x_1, x_2) = \frac{1}{L_1 L_2} \left(\frac{L_1}{2} + x_1 \right) \left(\frac{L_2}{2} + x_2 \right) \\ N_4(x_1, x_2) = \frac{1}{L_1 L_2} \left(\frac{L_1}{2} - x_1 \right) \left(\frac{L_2}{2} + x_2 \right) \end{cases} \quad (13)$$

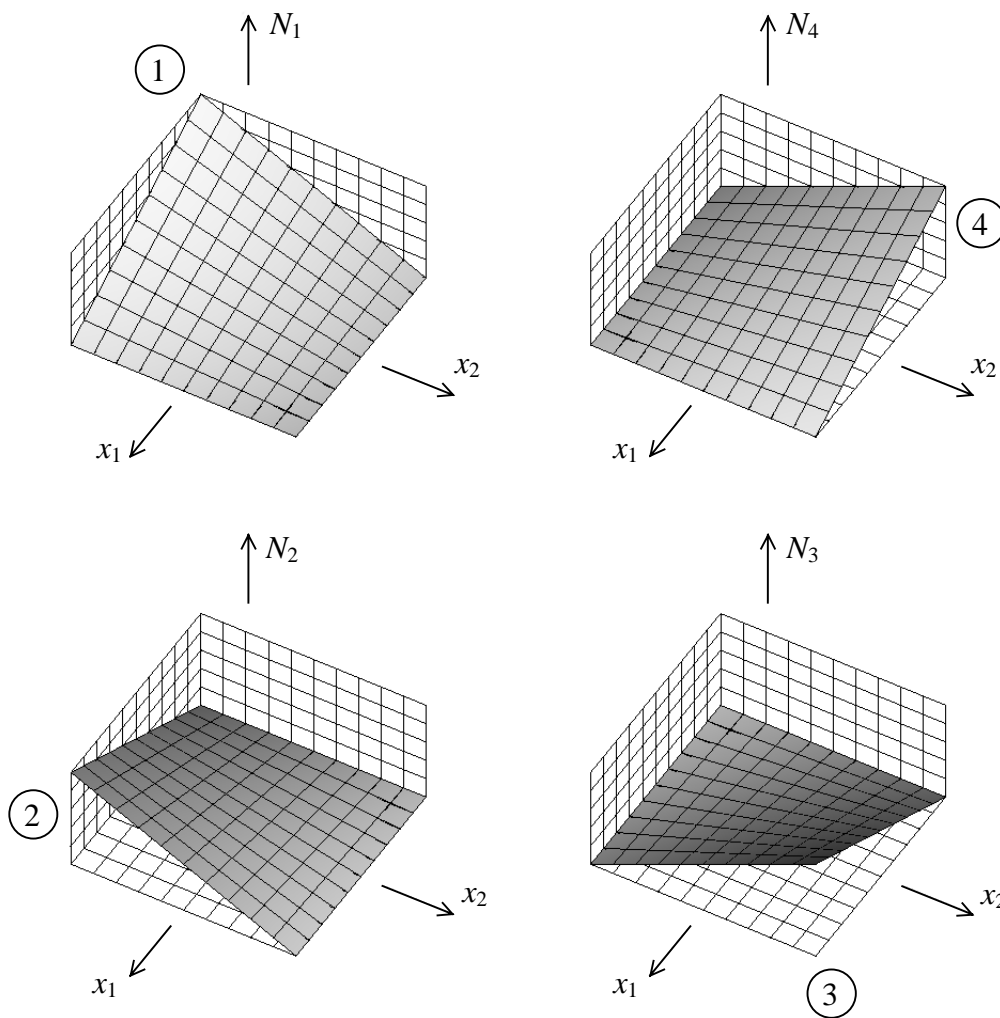


Fig. 6.2 - Gráficos das funções $N_i(x_1, x_2)$ para um elemento de dimensões $L_1 \times L_2 = 2 \times 2$.

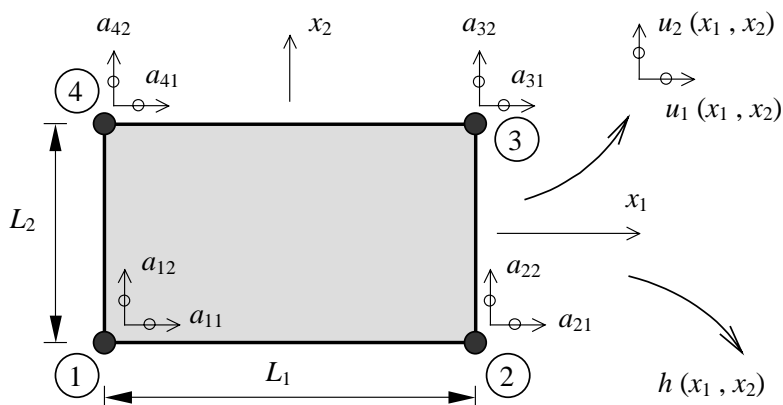


Fig. 6.3 - Elemento finito rectangular de quatro nós.

6.3 - Campo de deformações

O campo de deformações num estado plano de tensão é definido do seguinte modo [6.1]

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

ou de um modo mais compacto

$$\underline{\varepsilon} = \underline{L} \underline{u} \quad (15)$$

$(q \times 1) \quad (q \times m) \quad (m \times 1)$

Em (15), q é o número de componentes do vector $\underline{\varepsilon}$, que são neste caso três, e \underline{L} é o seguinte operador diferencial

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Substituindo (11) em (15), tem-se

$$\underline{\varepsilon} = \underset{(q \times 1)}{\underline{L}} \underset{(q \times m)}{\underline{N}} \underset{(m \times p)}{\underline{N}} \underset{(p \times 1)}{\underline{a}} \quad (17)$$

Designando por \underline{B} o produto $\underline{L} \underline{N}$

$$\underline{B} = \underset{(q \times p)}{\underline{L}} \underset{(q \times m)}{\underline{N}} \underset{(m \times p)}{\underline{N}} \quad (18)$$

a expressão (17) passa a

$$\underline{\varepsilon} = \underset{(q \times 1)}{\underline{B}} \underset{(q \times p)}{\underline{a}} \quad (19)$$

sendo, de acordo com (18), (16) e (12)

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{array} \right] \quad (20)$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} & \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & \frac{\partial N_4}{\partial x_2} & \frac{\partial N_4}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (21)$$

No caso do elemento com dimensões $L_1 \times L_2 = 2 \times 2$, a matriz \underline{B} é constituída pelas derivadas de (6), de acordo com (21)

$$\underline{B} = \frac{1}{4} \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} -1+x_2 & 0 & 1-x_2 & 0 & 1+x_2 & 0 & -1-x_2 & 0 \\ 0 & -1+x_1 & 0 & -1-x_1 & 0 & 1+x_1 & 0 & 1-x_1 \\ -1+x_1 & -1+x_2 & -1-x_1 & 1-x_2 & 1+x_1 & 1+x_2 & 1-x_1 & -1-x_2 \end{array} \right] \quad (22)$$

No caso do elemento de dimensões $L_1 \times L_2$, a matriz \underline{B} é constituída pelas derivadas de (13), de acordo com (21)

$$\underline{B} = \frac{1}{L_1 L_2} \begin{bmatrix} -\frac{L_2}{2} + x_2 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & -\frac{L_2}{2} - x_2 & 0 \\ 0 & -\frac{L_1}{2} + x_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \frac{L_1}{2} - x_1 \\ -\frac{L_1}{2} + x_1 & -\frac{L_2}{2} + x_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{L_1}{2} - x_1 & -\frac{L_2}{2} - x_2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

6.4 - Princípio dos trabalhos virtuais

Considere-se um estado plano de tensão constituído por um elemento finito formulado de acordo com o que foi exposto nas secções anteriores. Supondo que apenas existem acções distribuídas por unidade de comprimento na periferia do elemento finito, do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), que foi exposto no Capítulo 4, resulta a seguinte equação

$$\int_V \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dV = \int_L \delta \underline{u}^T \underline{p} dL \quad (24)$$

Nesta expressão o vector $\delta \underline{\varepsilon}$ apresenta componentes em correspondência com o vector $\underline{\varepsilon}$, definido em (14) e (15). O vector $\underline{\sigma}$ é o seguinte

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (25)$$

6.5 - Matriz de rigidez e vector solicitação

Com base no princípio dos trabalhos virtuais referido na secção anterior, vai-se em seguida proceder à dedução das expressões da matriz de rigidez e do vector solicitação que são utilizados no método dos deslocamentos, aplicado à análise de um estado plano de tensão.

Designando por h a espessura do elemento finito, tem-se em (24)

$$dV = h dS \quad (26)$$

em que dS representa o elemento de superfície.

A equação (19) referida à deformação virtual é a seguinte

$$\delta \underline{\varepsilon} = \underline{B} \delta \underline{a} \quad (27)$$

que é equivalente a

$$\delta \underline{\varepsilon}^T = \delta \underline{a}^T \underline{B}^T \quad (28)$$

A relação entre tensões e deformações é, para um estado plano de tensão e no caso dos materiais isotrópicos [6.1]

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (29)$$

ou de um modo mais compacto

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon} \quad (30)$$

sendo a matriz de elasticidade \underline{D} a seguinte

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (31)$$

A matriz de elasticidade \underline{D} depende do módulo de Young (E) e do coeficiente de Poisson (ν).

Substituindo (19) em (30) tem-se

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{B} \underline{a} \quad (32)$$

A equação (11) referida à deformação virtual é a seguinte

$$\delta \underline{u} = \underline{N} \delta \underline{a} \quad (33)$$

que é equivalente a

$$\delta \underline{u}^T = \delta \underline{a}^T \underline{N}^T \quad (34)$$

Substituindo todas estas equações em (24) passa a ter-se o PTV expresso por

$$\int_S \delta \underline{a}^T \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \underline{a} h dS = \int_L \delta \underline{a}^T \underline{N}^T \underline{p} dL \quad (35)$$

Uma vez que $dS = dx_1 dx_2$ e os deslocamentos nodais não dependem das variáveis x_1 e x_2 , os vectores $\delta \underline{a}^T$ e \underline{a} podem passar para fora do integral

$$\delta \underline{a}^T \int_S \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} h dS \underline{a} = \delta \underline{a}^T \int_L \underline{N}^T \underline{p} dL \quad (36)$$

De acordo com o PTV, a equação (36) é verdadeira para qualquer conjunto de deslocamentos virtuais, concluindo-se assim que

$$\int_S \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} h dS \underline{a} = \int_L \underline{N}^T \underline{p} dL \quad (37)$$

Comparando esta equação com a relação de rigidez que é utilizada no método dos deslocamentos

$$\underline{K} \underline{a} = \underline{F} \quad (38)$$

tem-se, no caso do estado plano de tensão

$$\underline{K} = \int_S \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} h dS \quad (39)$$

$$\underline{F} = \int_L \underline{N}^T \underline{p} dL \quad (40)$$

O vector \underline{a} encontra-se definido em (9).

Nas expressões (37)-(40) admite-se que as seguintes grandezas podem não ser constantes no domínio de integração: módulo de Young (E), coeficiente de Poisson (ν), espessura (h) e carga distribuída (\underline{p}).

No caso do elemento finito rectangular representado na Figura 6.3, a expressão da matriz de rigidez (39) passa a ser

$$\underline{K} = \int_{-L_2/2}^{L_2/2} \int_{-L_1/2}^{L_1/2} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} h \, dx_1 \, dx_2 \quad (41)$$

A matriz \underline{B} corresponde à expressão (23) e, no caso dos materiais isotrópicos, a matriz \underline{D} é dada por (31).

Uma vez que h é um escalar, as dimensões da matriz \underline{K} coincidem com as do produto $\underline{B}^T \underline{D} \underline{B}$

$$\begin{matrix} \underline{K} & = & \dots & \underline{B}^T & \underline{D} & \underline{B} & \dots \\ (p \times p) & & & (p \times q) & (q \times q) & (q \times p) & \end{matrix} \quad (42)$$

No caso do elemento finito de quatro nós, tem-se

$$\begin{matrix} \underline{K} & = & \dots & \underline{B}^T & \underline{D} & \underline{B} & \dots \\ (8 \times 8) & & & (8 \times 3) & (3 \times 3) & (3 \times 8) & \end{matrix} \quad (43)$$

Atendendo a (40), as dimensões do vector solicitação \underline{F} coincidem com as do produto $\underline{N}^T \underline{p}$

$$\begin{matrix} \underline{F} & = & \dots & \underline{N}^T & \underline{p} & \dots \\ (p \times 1) & & & (p \times m) & (m \times 1) & \end{matrix} \quad (44)$$

No caso do elemento finito de quatro nós, tem-se

$$\begin{matrix} \underline{F} & = & \dots & \underline{N}^T & \underline{p} & \dots \\ (8 \times 1) & & & (8 \times 2) & (2 \times 1) & \end{matrix} \quad (45)$$

6.5.1 - Cálculo de um elemento da matriz de rigidez

Apresenta-se em seguida o cálculo do elemento K_{58} da matriz de rigidez do elemento finito representado na Figura 6.1, com $E = 200\,000$ MPa, $\nu = 0$ e $h = 0.3$ m. De acordo com (41), tem-se

$$\underline{K} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} h dx_1 dx_2 \quad (46)$$

O cálculo de $\underline{B}^T \underline{D} \underline{B}$ pode ser efectuado com base nos somatórios correspondentes aos produtos matriciais

$$\left(\underline{B}^T \underline{D} \underline{B}\right)_{ij} = \sum_{k=1}^q \sum_{p=1}^q B_{ki} D_{kp} B_{pj} \quad (47)$$

sendo $q = 3$.

Para calcular K_{58} é suficiente desenvolver os somatórios para o caso: $i = 5; j = 8$

$$\left(\underline{B}^T \underline{D} \underline{B}\right)_{58} = \sum_{k=1}^3 \sum_{p=1}^3 B_{k5} D_{kp} B_{p8} = \quad (48)$$

$$= \sum_{k=1}^3 (B_{k5} D_{k1} B_{18} + B_{k5} D_{k2} B_{28} + B_{k5} D_{k3} B_{38}) = \quad (49)$$

$$\begin{aligned} &= B_{15} D_{11} B_{18} + B_{25} D_{21} B_{18} + B_{35} D_{31} B_{18} + \\ &+ B_{15} D_{12} B_{28} + B_{25} D_{22} B_{28} + B_{35} D_{32} B_{28} + \\ &+ B_{15} D_{13} B_{38} + B_{25} D_{23} B_{38} + B_{35} D_{33} B_{38} \end{aligned} \quad (50)$$

Consultando as matrizes \underline{B} (22) e \underline{D} (31) com $\nu = 0$, verifica-se facilmente que, neste exemplo, só o último monómio de (50) é não nulo. Assim, tem-se

$$\left(\underline{B}^T \underline{D} \underline{B}\right)_{58} = B_{35} D_{33} B_{38} = \frac{\partial N_3}{\partial x_2} \frac{E}{2} \frac{\partial N_4}{\partial x_1} \quad (51)$$

Atendendo a (22) e (31) e ao facto de ser $E = 200\,000$, chega-se a

$$\left(\underline{B}^T \underline{D} \underline{B}\right)_{58} = \left(\frac{1+x_1}{4}\right) 100\,000 \left(\frac{-1-x_2}{4}\right) \quad (52)$$

$$\left(\underline{B}^T \underline{D} \underline{B}\right)_{58} = 6\,250 (1+x_1) (-1-x_2) \quad (53)$$

Atendendo a (46) e ao facto de ser $h = 0.3$ m, tem-se

$$K_{58} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (\underline{B}^T \underline{D} \underline{B})_{58} h \, d x_1 \, d x_2 \quad (54)$$

$$K_{58} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} 1875 (1+x_1)(-1-x_2) \, d x_1 \, d x_2 \quad (55)$$

$$K_{58} = -7\,500.000\,000 \text{ MN/m} \quad (56)$$

6.5.2 - Cálculo do vector solitação correspondente a uma carga distribuída

Na Figura 6.4 encontra-se representado o elemento finito da Figura 6.1, sujeito a uma carga distribuída no bordo 2-3.

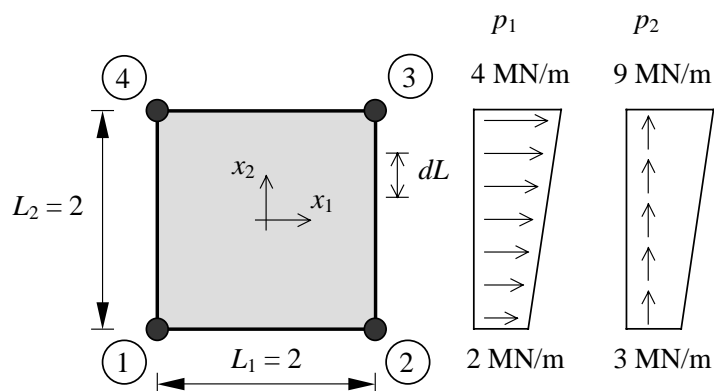


Fig. 6.4 - Elemento finito sujeito a uma carga distribuída.

As forças nodais equivalentes à acção distribuída no bordo calculam-se com a expressão (40), que aqui se reproduz

$$\underline{F} = \int_L \underline{N}^T \underline{p} \, dL \quad (57)$$

sendo \underline{N} a matriz (12) e \underline{p} o seguinte vector

$$\underline{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad (58)$$

Neste exemplo, dL coincide com dx_2 e todos os pontos do domínio de integração apresentam coordenada $x_1 = 1$. Assim, o integral de linha (57) passa a ser

$$\underline{F} = \int_{-1}^{+1} \underline{N}^T \underline{p} \, dx_2 \quad (59)$$

e nos elementos da matriz \underline{N} , que são as funções de forma (6), deve-se substituir x_1 por 1, obtendo-se

$$\begin{cases} N_1(x_1, x_2) \rightarrow N_1(1, x_2) = N_1(x_2) = 0 \\ N_2(x_1, x_2) \rightarrow N_2(1, x_2) = N_2(x_2) = (1 - x_2) / 2 \\ N_3(x_1, x_2) \rightarrow N_3(1, x_2) = N_3(x_2) = (1 + x_2) / 2 \\ N_4(x_1, x_2) \rightarrow N_4(1, x_2) = N_4(x_2) = 0 \end{cases} \quad (60)$$

Atendendo a (12) e a (58), o produto $\underline{N}^T \underline{p}$ que figura em (59) é o seguinte

$$\underline{N}^T \underline{p} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \\ N_4 & 0 \\ 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad (61)$$

Para os valores das acções indicados na Figura 6.4, são as seguintes as expressões das funções p_1 e p_2

$$\begin{cases} p_1(x_2) = 3 + x_2 \\ p_2(x_2) = 6 + 3x_2 \end{cases} \quad (62)$$

Com base em (61), (60) e (62), tem-se

$$\underline{N}^T \underline{p} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{(1-x_2)/2}{(1+x_2)/2} & \frac{0}{0} \\ 0 & (1-x_2)/2 \\ \frac{(1+x_2)/2}{(1+x_2)/2} & \frac{0}{0} \\ 0 & (1+x_2)/2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3+x_2 \\ 6+3x_2 \end{bmatrix} \quad (63)$$

resultando de (59)

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_{21} \\ F_{22} \\ F_{31} \\ F_{32} \\ F_{41} \\ F_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.666\ 667 \\ 5.000\ 000 \\ 3.333\ 333 \\ 7.000\ 000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (64)$$

Em (64), F_{ij} representa a componente de \underline{F} que está associada ao nó i e que actua na direcção x_j .

Nos nós 1 e 4, são nulas as componentes da força nodal equivalente à carga distribuída no bordo 2-3.

Neste exemplo simples, os valores indicados em (64) coincidem com as reacções que se obteriam numa viga simplesmente apoiada carregada com as cargas trapezoidais da Figura 6.4.

6.6 - Caso geral com substituição de variáveis

O estudo apresentado nas secções anteriores e que se encontra limitado a um elemento quadrado de dimensões 2×2 pode ser facilmente estendido a elementos rectangulares de dimensões $L_1 \times L_2$. Toda a sua formulação seria uma extensão trivial do que foi atrás

apresentado. Nesta secção é desenvolvido um elemento finito quadrilátero de geometria arbitrária, destinado à discretização de estados planos de tensão (ver a Figura 6.5).

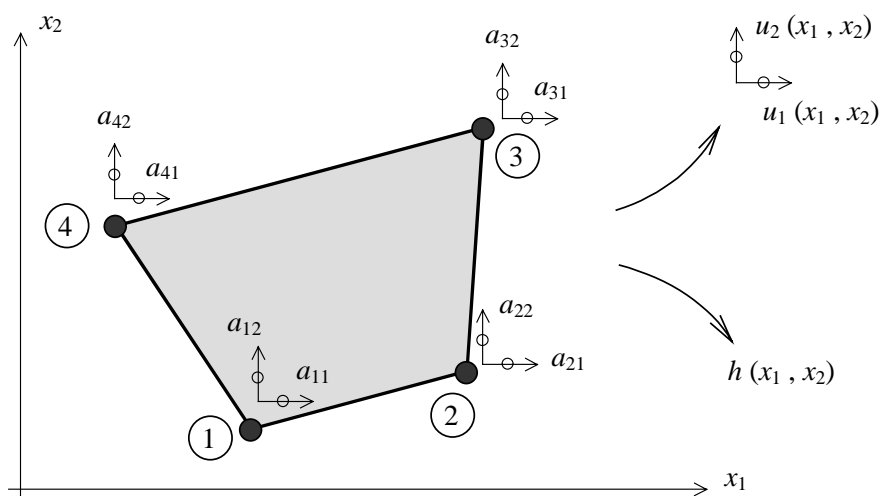


Fig. 6.5 - Elemento finito quadrilátero de quatro nós com geometria arbitrária.

As coordenadas dos nós são armazenadas na matriz \bar{x} , cujo elemento genérico \bar{x}_{ij} corresponde à coordenada cartesiana do nó i segundo a direcção x_j .

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{11} & \bar{x}_{12} \\ \bar{x}_{21} & \bar{x}_{22} \\ \bar{x}_{31} & \bar{x}_{32} \\ \bar{x}_{41} & \bar{x}_{42} \end{bmatrix} \quad (65)$$

De acordo com a simbologia apresentada na Secção 6.1, a matriz \bar{x} tem dimensões $n \times m$.

A espessura do elemento finito laminar representado na Figura 6.5 é designada por h , que pode também ser uma função de x_1 e de x_2 .

A determinação da matriz de rigidez do elemento finito com a expressão (39), requer neste caso o cálculo de um integral duplo com um domínio de integração S , que corresponde a um quadrilátero irregular de geometria definida pelos quatro nós do elemento. Tendo em vista a sistematização deste processo, de modo a facilitar a sua programação em computador, revela-se muito vantajoso efectuar a seguinte substituição das variáveis x_1 e x_2 .

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_1(s_1, s_2) \\ x_2 \rightarrow x_2(s_1, s_2) \end{cases} \quad (66)$$

Na Figura 6.6 encontra-se representado o novo domínio de integração, que corresponde ao intervalo $[-1, 1]$, quer para a variável s_1 , quer para s_2 .

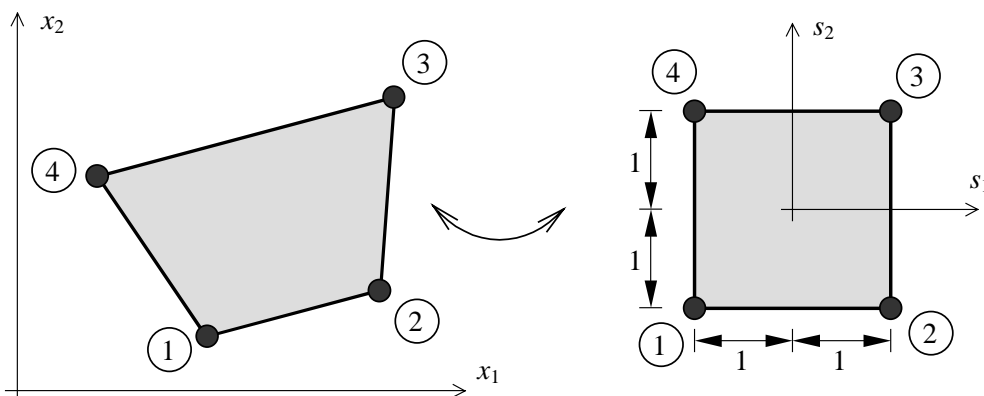


Fig. 6.6 - Substituição das variáveis x_1 e x_2 .

Os valores nodais das coordenadas s_1 e s_2 são os seguintes

$$\bar{s} = \begin{bmatrix} \bar{s}_{11} & \bar{s}_{12} \\ \bar{s}_{21} & \bar{s}_{22} \\ \bar{s}_{31} & \bar{s}_{32} \\ \bar{s}_{41} & \bar{s}_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ +1 & -1 \\ +1 & +1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \quad (67)$$

De acordo com (66), a cada ponto (s_1, s_2) corresponde um ponto (x_1, x_2) . A passagem do sistema de coordenadas s para o sistema de coordenadas x é efectuada com uma interpolação semelhante à que foi efectuada na Secção 6.2 para o campo de deslocamentos. De acordo com (3) e (4), tem-se

$$x_1(s_1, s_2) = N_1(s_1, s_2) \bar{x}_{11} + N_2(s_1, s_2) \bar{x}_{21} + N_3(s_1, s_2) \bar{x}_{31} + N_4(s_1, s_2) \bar{x}_{41} \quad (68)$$

$$x_2(s_1, s_2) = N_1(s_1, s_2) \bar{x}_{12} + N_2(s_1, s_2) \bar{x}_{22} + N_3(s_1, s_2) \bar{x}_{32} + N_4(s_1, s_2) \bar{x}_{42} \quad (69)$$

No sistema de coordenadas s , as funções de forma coincidem com as que foram descritas na Secção 6.2, bastando substituir em (6) x_1 por s_1 e x_2 por s_2 , resultando

$$\begin{cases} N_1(s_1, s_2) = (1 - s_1)(1 - s_2)/4 \\ N_2(s_1, s_2) = (1 + s_1)(1 - s_2)/4 \\ N_3(s_1, s_2) = (1 + s_1)(1 + s_2)/4 \\ N_4(s_1, s_2) = (1 - s_1)(1 + s_2)/4 \end{cases} \quad (70)$$

Tal como no caso do campo de deslocamentos, ao atribuir a (s_1, s_2) os valores nodais indicados em (67), obtêm-se em (68) e (69) as coordenadas dos nós (65).

Por exemplo, para $(s_1, s_2) = (1, 1)$, a função N_3 vale um e as restantes são nulas, obtendo-se em (68) $x_1(1, 1) = \bar{x}_{31}$ e em (69) $x_2(1, 1) = \bar{x}_{32}$.

As equações (68) e (69) podem ser colocadas em forma matricial do seguinte modo

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{11} & \bar{x}_{21} & \bar{x}_{31} & \bar{x}_{41} \\ \bar{x}_{12} & \bar{x}_{22} & \bar{x}_{32} & \bar{x}_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} \quad (71)$$

ou

$$\underset{(m \times 1)}{\underline{x}} = \underset{(m \times n)}{\bar{x}}^T \underset{(n \times 1)}{\underline{N}_v} \quad (72)$$

sendo

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (73)$$

$$\underline{N}_v = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} \quad (74)$$

Em (72), \bar{x} é a matriz $n \times m$ definida em (65).

Após a substituição de variáveis indicada em (66), o integral (39) passa a ser

$$\underline{K} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} h J d s_1 d s_2 \quad (75)$$

Nesta expressão J é o determinante Jacobiano, que corresponde ao determinante da matriz Jacobiana \underline{J} . A matriz Jacobiana correspondente à transformação (66) é definida da seguinte forma [6.2]

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial s_1} & \frac{\partial x_1}{\partial s_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial s_1} & \frac{\partial x_2}{\partial s_2} \end{bmatrix} \quad (76)$$

$$J = |\underline{J}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial s_1} & \frac{\partial x_1}{\partial s_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial s_1} & \frac{\partial x_2}{\partial s_2} \end{vmatrix} \quad (77)$$

Para permitir o cálculo do integral (75), todos os componentes da função integranda têm de depender de s_1 e s_2 .

Se a matriz \underline{D} (31) não for constante, é possível utilizar o mesmo tipo de interpolação para definir E e ν em função de s_1 e s_2 .

$$E(s_1, s_2) = N_1(s_1, s_2) \bar{E}_1 + N_2(s_1, s_2) \bar{E}_2 + N_3(s_1, s_2) \bar{E}_3 + N_4(s_1, s_2) \bar{E}_4 \quad (78)$$

$$\nu(s_1, s_2) = N_1(s_1, s_2) \bar{\nu}_1 + N_2(s_1, s_2) \bar{\nu}_2 + N_3(s_1, s_2) \bar{\nu}_3 + N_4(s_1, s_2) \bar{\nu}_4 \quad (79)$$

Nesta expressão, \bar{E}_i e $\bar{\nu}_i$ são os valores no nó i do módulo de Young e do coeficiente de Poisson. Na generalidade dos casos práticos E e ν são considerados constantes ao nível de cada elemento finito. Quando uma estrutura apresenta mais do que um tipo de material, a fronteira entre as zonas correspondentes a cada material deve coincidir com a transição entre elementos finitos.

Se a espessura do elemento não for constante pode ser interpolada de um modo semelhante

$$h(s_1, s_2) = N_1(s_1, s_2) \bar{h}_1 + N_2(s_1, s_2) \bar{h}_2 + N_3(s_1, s_2) \bar{h}_3 + N_4(s_1, s_2) \bar{h}_4 \quad (80)$$

Nesta expressão, \bar{h}_i é o valor da espessura no nó i .

Os elementos da matriz Jacobiana (76) obtêm-se por derivação de (68) e (69), resultando

$$\frac{\partial x_1}{\partial s_1} = \frac{\partial N_1}{\partial s_1} \bar{x}_{11} + \frac{\partial N_2}{\partial s_1} \bar{x}_{21} + \frac{\partial N_3}{\partial s_1} \bar{x}_{31} + \frac{\partial N_4}{\partial s_1} \bar{x}_{41} \quad (81)$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial s_2} = \frac{\partial N_1}{\partial s_2} \bar{x}_{11} + \frac{\partial N_2}{\partial s_2} \bar{x}_{21} + \frac{\partial N_3}{\partial s_2} \bar{x}_{31} + \frac{\partial N_4}{\partial s_2} \bar{x}_{41} \quad (82)$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial s_1} = \frac{\partial N_1}{\partial s_1} \bar{x}_{12} + \frac{\partial N_2}{\partial s_1} \bar{x}_{22} + \frac{\partial N_3}{\partial s_1} \bar{x}_{32} + \frac{\partial N_4}{\partial s_1} \bar{x}_{42} \quad (83)$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial s_2} = \frac{\partial N_1}{\partial s_2} \bar{x}_{12} + \frac{\partial N_2}{\partial s_2} \bar{x}_{22} + \frac{\partial N_3}{\partial s_2} \bar{x}_{32} + \frac{\partial N_4}{\partial s_2} \bar{x}_{42} \quad (84)$$

As equações (81)-(84) são equivalentes à seguinte equação matricial

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial s_1} & \frac{\partial x_1}{\partial s_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial s_1} & \frac{\partial x_2}{\partial s_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{11} & \bar{x}_{21} & \bar{x}_{31} & \bar{x}_{41} \\ \bar{x}_{12} & \bar{x}_{22} & \bar{x}_{32} & \bar{x}_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial s_1} & \frac{\partial N_1}{\partial s_2} \\ \frac{\partial N_2}{\partial s_1} & \frac{\partial N_2}{\partial s_2} \\ \frac{\partial N_3}{\partial s_1} & \frac{\partial N_3}{\partial s_2} \\ \frac{\partial N_4}{\partial s_1} & \frac{\partial N_4}{\partial s_2} \end{bmatrix} \quad (85)$$

De um modo mais compacto, tem-se

$$\underline{J} = \underline{\bar{x}}^T \frac{\partial \underline{N}}{\partial \underline{s}} \quad (86)$$

$(m \times m)$ $(m \times n)$ $(n \times m)$

sendo

$$\frac{\partial \underline{N}}{\partial \underline{s}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial s_1} & \frac{\partial N_1}{\partial s_2} \\ \frac{\partial N_2}{\partial s_1} & \frac{\partial N_2}{\partial s_2} \\ \frac{\partial N_3}{\partial s_1} & \frac{\partial N_3}{\partial s_2} \\ \frac{\partial N_4}{\partial s_1} & \frac{\partial N_4}{\partial s_2} \end{bmatrix} \quad (87)$$

As expressões dos elementos da matriz (87) obtêm-se por derivação de (70) em ordem a s_1 e s_2 , resultando

$$\frac{\partial \underline{N}}{\partial \underline{s}} = \begin{bmatrix} (-1+s_2)/4 & (-1+s_1)/4 \\ (+1-s_2)/4 & (-1-s_1)/4 \\ (+1+s_2)/4 & (+1+s_1)/4 \\ (-1-s_2)/4 & (+1-s_1)/4 \end{bmatrix} \quad (88)$$

Substituindo as expressões (88) em (85), obtêm-se os elementos da matriz Jacobiana em função de s_1 e s_2 . Nota: os elementos da matriz \bar{x} são as coordenadas cartesianas dos nós, sendo portanto constantes de valor conhecido.

Tendo em vista o cálculo do integral (75) encontram-se já definidos em função de s_1 e s_2 todos os componentes da função integranda, com excepção da matriz \underline{B} . Apresenta-se em seguida o procedimento para a sua obtenção.

No caso do elemento finito quadrilátero de quatro nós e de geometria arbitrária, as equações (9)-(12) permanecem válidas (ver as Secções 6.2 e 6.3). As equações (10) e (11) são em seguida reproduzidas.

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{31} \\ a_{32} \\ a_{41} \\ a_{42} \end{bmatrix} \quad (89)$$

$$\underline{u} = \underline{N} \underline{a} \quad (90)$$

$(m \times 1) \quad (m \times p) \quad (p \times 1)$

No caso do elemento de geometria arbitrária, as funções de forma \underline{N} dependem das variáveis s_1 e s_2 . Neste caso, a interpolação dos deslocamentos (89) é efectuada de um modo coincidente com o que foi utilizado para interpolar as coordenadas cartesianas dos nós (68) e (69). Quando o método de interpolação dos deslocamentos nodais e das coordenadas cartesianas dos nós coincidem, diz-se que a formulação do elemento finito é **isoparamétrica**.

O campo de deformações obtém-se de um modo semelhante ao que foi descrito na Secção 6.3, reproduzindo-se em seguida as equações mais significativas.

$$\underline{\varepsilon} = \underline{L} \underline{u} \quad (91)$$

$(q \times 1) \quad (q \times m) \quad (m \times 1)$

Por substituição de (90) em (91) chega-se a

$$\underline{\varepsilon} = \underline{L} \underline{N} \underline{a} \quad (92)$$

$(q \times 1) \quad (q \times m) \quad (m \times p) \quad (p \times 1)$

$$\underline{B} = \underline{L} \underline{N} \quad (93)$$

$(q \times p) \quad (q \times m) \quad (m \times p)$

$$\underline{\varepsilon} = \underline{B} \underline{a} \quad (94)$$

$(q \times 1) \quad (q \times p) \quad (p \times 1)$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{array} \right] \quad (95)$$

$$\underline{B} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} & \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & \frac{\partial N_4}{\partial x_2} & \frac{\partial N_4}{\partial x_1} \end{array} \right] \quad (96)$$

A matriz \underline{B} depende das derivadas das funções de forma em ordem a x_j ($\partial N_i / \partial x_j$). De modo a ser possível calcular o integral (75), é necessário obter as expressões de $\partial N_i / \partial x_j$ em função de s_1 e s_2 .

Considere-se uma das funções de forma (N_i) dependendo de x_1 e x_2 , que por sua vez dependem de s_1 e s_2 .

$$N_i = N_i(x_1(s_1, s_2), x_2(s_1, s_2)) \quad (97)$$

Pela regra da cadeia tem-se

$$\begin{cases} \frac{\partial N_i}{\partial s_1} = \frac{\partial N_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial s_1} + \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial s_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial s_2} = \frac{\partial N_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial s_2} + \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial s_2} \end{cases} \quad (98)$$

que se pode escrever da seguinte forma em notação matricial

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial s_1} & \frac{\partial N_i}{\partial s_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} & \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial s_1} & \frac{\partial x_1}{\partial s_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial s_1} & \frac{\partial x_2}{\partial s_2} \end{bmatrix} \quad (99)$$

Atribuindo ao índice i os valores 1 a 4 e agrupando os quatro casos nas seguintes matrizes, chega-se a

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial s_1} & \frac{\partial N_1}{\partial s_2} \\ \frac{\partial N_2}{\partial s_1} & \frac{\partial N_2}{\partial s_2} \\ \frac{\partial N_3}{\partial s_1} & \frac{\partial N_3}{\partial s_2} \\ \frac{\partial N_4}{\partial s_1} & \frac{\partial N_4}{\partial s_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_4}{\partial x_1} & \frac{\partial N_4}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial s_1} & \frac{\partial x_1}{\partial s_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial s_1} & \frac{\partial x_2}{\partial s_2} \end{bmatrix} \quad (100)$$

que de um modo mais compacto se pode escrever

$$\frac{\partial \underline{N}}{\partial \underline{s}} = \frac{\partial \underline{N}}{\partial \underline{x}} \underline{J} \quad (101)$$

sendo \underline{J} a matriz Jacobiana definida em (76) e em (86).

Multiplicando ambos os membros de (101), à direita, por \underline{J}^{-1} obtém-se

$$\frac{\partial \underline{N}}{\partial \underline{x}} = \frac{\partial \underline{N}}{\partial \underline{s}} \underline{J}^{-1} \quad (102)$$

$(n \times m) \quad (n \times m) \quad (m \times m)$

A matriz $\partial \underline{N} / \partial \underline{s}$ foi definida em (87) e (88), sendo os seus elementos funções de s_1 e s_2 . Em (86) pode verificar-se que os elementos da matriz \underline{J} são também funções de s_1 e s_2 . Os elementos da seguinte matriz, que dependem de s_1 e s_2 ,

$$\frac{\partial \underline{N}}{\partial \underline{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_4}{\partial x_1} & \frac{\partial N_4}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (103)$$

são depois espalhados na matriz \underline{B} de acordo com (96).

Deste modo se alcançou o objectivo de calcular os elementos da matriz \underline{B} como sendo funções de s_1 e s_2 .

Uma vez que todos os componentes da função integranda de (75) se encontram definidos em função de s_1 e s_2 , é agora possível proceder ao cálculo da matriz de rigidez do elemento finito. O facto de se tratar de um integral de difícil resolução e de os limites de integração serem -1 e +1, sugere o recurso à técnica de integração numérica que se encontra descrita no Capítulo 5.

6.7 - Algoritmo de cálculo da matriz de rigidez de um elemento isoparamétrico

Um integral duplo, cujos limites de integração sejam -1 e +1 para ambas as variáveis, pode ser calculado pela quadratura de Gauss, sendo o resultado obtido, em geral, um valor aproximado. De acordo com o que foi exposto no Capítulo 5, a correspondente expressão é a seguinte

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(s_1, s_2) d s_1 d s_2 \cong \sum_{i=1}^{n_{GP1}} \sum_{j=1}^{n_{GP2}} W_i W_j f(P_i, P_j) \quad (104)$$

Nesta expressão, n_{GP1} é o número de pontos de Gauss associado à direcção s_1 e n_{GP2} é o número correspondente à direcção s_2 . Os parâmetros W_i e W_j são os pesos associados às direcções s_1 e s_2 . A função f deve ser avaliada nos pontos de Gauss, cujas coordenadas são

$$(s_1, s_2) = (P_i, P_j) \quad (105)$$

De aqui em diante, o segundo membro de (104) passa a ser designado por J . Assim, no caso de ser $n_{GP1} = 2$ e $n_{GP2} = 2$, da expansão dos somatórios em (104) resulta a seguinte expressão para J

$$J = \sum_{i=1}^{n_{GP1}} (W_i W_1 f(P_i, P_1) + W_i W_2 f(P_i, P_2)) \quad (106)$$

$$J = W_1 W_1 f(P_1, P_1) + W_1 W_2 f(P_1, P_2) + W_2 W_1 f(P_2, P_1) + W_2 W_2 f(P_2, P_2) \quad (107)$$

De acordo com o que foi exposto no Capítulo 5, os valores dos pesos W_i e das posições P_i é neste caso

$$\begin{cases} W_1 = 1 \\ W_2 = 1 \\ P_1 = -1/\sqrt{3} = -0.57735\ 02692 \\ P_2 = +1/\sqrt{3} = +0.57735\ 02692 \end{cases} \quad (108)$$

passando J a ser avaliado do seguinte modo

$$J = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, +\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(+\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(+\frac{1}{\sqrt{3}}, +\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad (109)$$

O valor aproximado do integral duplo (104), depende do resultado da avaliação da função $f(s_1, s_2)$ em quatro pontos de Gauss, cuja localização se encontra na Figura 6.7.

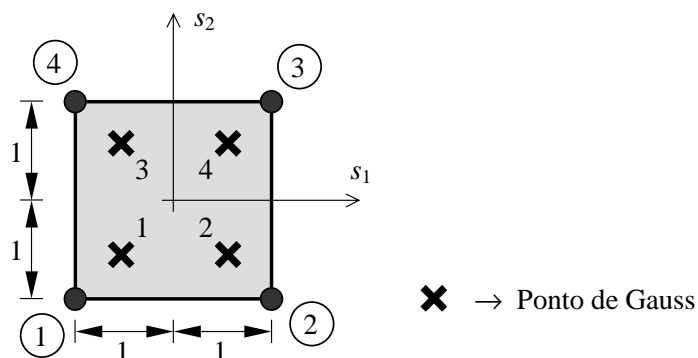


Fig. 6.7 - Localização dos quatro pontos de Gauss no sistema de coordenadas (s_1, s_2) .

De acordo com (107), para calcular o valor aproximado do integral (75), recorrendo à quadratura de Gauss com 2x2 pontos, procede-se do seguinte modo:

- avalia-se a sua função integranda nos quatro pontos de Gauss;
- multiplica-se o resultado correspondente a cada ponto de Gauss pelos respectivos pesos (que neste caso são unitários);
- e somam-se as quatro parcelas.

Como se pode verificar em (75), a função integranda é um produto de matrizes de funções, que é em seguida multiplicado por funções escalares. Atendendo às características da quadratura de Gauss, é possível avaliar todos os elementos de cada matriz em cada ponto de Gauss e só em seguida fazer o produto matricial, bem como o produto pelas funções escalares avaliadas também nesse ponto de Gauss. Deste modo os produtos matriciais são efectuados com valores numéricos em vez de funções, facilitando assim a programação deste algoritmo em computador.

Apresenta-se em seguida a sequência de operações que têm de ser efectuadas para calcular a matriz de rigidez de um elemento finito quadrilátero, recorrendo à quadratura de Gauss com 2x2 pontos.

Dados:

- coordenadas cartesianas dos nós (\bar{x}_{ij}) ;
- espessura do elemento finito em cada nó (\bar{h}_i) ;

- módulo de Young (E - constante em todo o elemento finito);
- coeficiente de Poisson (ν - constante em todo o elemento finito).

Algoritmo:

- Inicializar a matriz \bar{x} com as coordenadas cartesianas dos nós do elemento finito (65)
- Inicializar o vector \bar{h} com as espessuras do elemento finito nos nós
- Inicializar uma tabela com os pesos associados a cada ponto de Gauss

P. de Gauss	W_i	W_j
1	1.0	1.0
2	1.0	1.0
3	1.0	1.0
4	1.0	1.0

- Inicializar uma tabela com as coordenadas de cada ponto de Gauss (ver a Figura 6.7)

P. de Gauss	P_i	P_j
1	-0.57735...	-0.57735...
2	+0.57735...	-0.57735...
3	-0.57735...	+0.57735...
4	+0.57735...	+0.57735...

- Calcular os elementos da matriz \underline{D} , recorrendo a (31)
- Inicializar com valor nulo todos os elementos da matriz de rigidez \underline{K} , cuja dimensão é 8×8
- Para cada ponto de Gauss $(s_1, s_2) = (P_i, P_j)$:
 - Avaliar as funções de forma N_i no ponto (P_i, P_j) , recorrendo a (70)
 - Calcular a espessura h no ponto (P_i, P_j) , recorrendo a (80)
 - Calcular os elementos da matriz $\partial \underline{N} / \partial \underline{s}$ no ponto (P_i, P_j) , recorrendo a (88)
 - Calcular os elementos da matriz Jacobiana (\underline{J}) no ponto (P_i, P_j) , recorrendo a (85)
 - Calcular o determinante da matriz Jacobiana (J)
 - Calcular a inversa da matriz Jacobiana (\underline{J}^{-1})
 - Calcular a matriz $\partial \underline{N} / \partial \underline{x}$ no ponto (P_i, P_j) , recorrendo a (102)

- Espalhar os elementos da matriz $\partial \underline{N} / \partial \underline{x}$ (103) na matriz \underline{B} de acordo com (96)
 - Calcular $\underline{B}^T \underline{D} \underline{B} h J$, que consiste num produto de matrizes e escalares avaliados no ponto (P_i, P_j) (75), do qual resulta uma matriz com as dimensões da matriz de rigidez \underline{K} , que se designa por \underline{K}'
 - Multiplicar todos os elementos de \underline{K}' pelos pesos $W_i W_j$ correspondentes ao ponto de Gauss corrente
 - Adicionar $W_i W_j \underline{K}'$ à matriz de rigidez do elemento finito (\underline{K}).
- Fim do ciclo estendido aos pontos de Gauss.

6.8 - Cálculo das tensões e deformações finais

Depois de resolvido o sistema de equações $\underline{K} \underline{a} = \underline{F}$, com \underline{K} , \underline{a} e \underline{F} referentes à totalidade dos graus de liberdade da estrutura, é possível calcular o estado de tensão e deformação em qualquer ponto de qualquer elemento. Apesar de a formulação permitir o cálculo de tensões e extensões em qualquer ponto, verifica-se que existe uma muito maior precisão se os pontos seleccionados coincidirem com os pontos de Gauss correspondentes à quadratura de Gauss com 2x2 pontos [6.3]. Este facto é independente do número de pontos de Gauss que foi utilizado no cálculo dos componentes de \underline{K} e \underline{F} . Assim, deve-se proceder do seguinte modo para calcular as deformações e tensões num ponto de um elemento finito:

- seleccionar o elemento finito que vai ser alvo do estudo;
- nesse elemento, seleccionar o ponto de Gauss em que se pretende conhecer o estado de tensão;
- calcular a matriz \underline{B} no ponto seleccionado, cujas coordenadas são

$$(s_1, s_2) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad (110)$$

- com base no vector que contém todos os deslocamentos, extrair para um vector de oito componentes os deslocamentos dos nós do elemento que está a ser estudado (\underline{a});
- calcular o vector deformação ($\underline{\varepsilon}$) com a expressão (94);

- calcular a matriz de elasticidade (\underline{D}) com a expressão (31);
- calcular o vector tensão ($\underline{\sigma}$) com a expressão (30);

Depois de obtidos os valores de $\underline{\sigma}$ e $\underline{\varepsilon}$ nos pontos de Gauss (2x2), é possível fazer a sua interpolação ou extrapolação para outros pontos do elemento, nomeadamente para os seus nós [6.4]. Desta forma se obtêm resultados mais precisos do que aqueles que se obteriam com a avaliação directa das tensões no ponto pretendido.

6.9 - Considerações finais

Neste capítulo foi apresentado o modo de obter a matriz de rigidez de um elemento finito quadrilátero de geometria arbitrária, destinado à discretização de estados planos de tensão. Foi apresentado com detalhe o caso do elemento de quatro nós e da quadratura de Gauss com 2x2 pontos. Alguns aspectos importantes são deixados para outros capítulos, tais como a assemblagem da matriz de rigidez global, o desenvolvimento de elementos com mais do que quatro nós, a influência do número de pontos de Gauss na qualidade dos resultados, o cálculo de acções nodais equivalentes a acções concentradas, distribuídas e de volume, etc.

BIBLIOGRAFIA

- [6.1] - Azevedo, A. F. M. - Mecânica dos Sólidos, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1996.
- [6.2] - Kreyszig, E. - Advanced Engineering Mathematics, Sixth Edition, John Wiley & Sons, Inc., 1988.
- [6.3] - Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L. - The Finite Element Method, Fourth Edition, McGraw-Hill, 1988.
- [6.4] - Cook, R. D.; Malkus, D. S.; Plesha, M. E.; Witt, R. J. - Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Fourth Edition, John Wiley & Sons, Inc., 2002.

