

## CAPÍTULO 8

### ASSEMBLAGEM DE ELEMENTOS FINITOS

No Capítulo 3, foi apresentado com detalhe o caso da assemblagem de barras em problemas unidimensionais. Neste capítulo apresenta-se de um modo sucinto a adaptação da técnica já descrita ao caso dos elementos finitos com mais do que dois nós e mais do que um grau de liberdade por nó [8.1].

#### 8.1 - Simbologia

Apresenta-se em primeiro lugar a simbologia adoptada na descrição da assemblagem de elementos finitos.

Tabela 8.1 - Simbologia relativa à assemblagem de elementos finitos.

$x$	Coordenada cartesiana
$a$	Deslocamentos nodais, nos graus de liberdade da estrutura, no referencial geral
$a_g$	Deslocamentos nodais, nos graus de liberdade do elemento finito, no referencial geral
$K$	Matriz de rigidez da estrutura no referencial geral
$K_g$	Matriz de rigidez do elemento finito no referencial geral
$F$	Forças nodais equivalentes à acção exterior, nos graus de liberdade da estrutura, no referencial geral
$F_g$	Forças nodais equivalentes à acção exterior, nos graus de liberdade do elemento finito, no referencial geral

## 8.2 - Assemblagem da matriz de rigidez global e do vector solicitação

Depois de calculadas as matrizes de rigidez de todos os elementos finitos no referencial geral ( $\underline{K}_g$ ), é necessário proceder ao cálculo da matriz de rigidez global da estrutura ( $\underline{K}$ ). Uma operação semelhante tem de ser efectuada com os vectores solicitação dos diversos elementos finitos.

A assemblagem das matrizes de rigidez dos diversos elementos finitos na matriz de rigidez global é em seguida apresentada com base no exemplo da Figura 8.1.

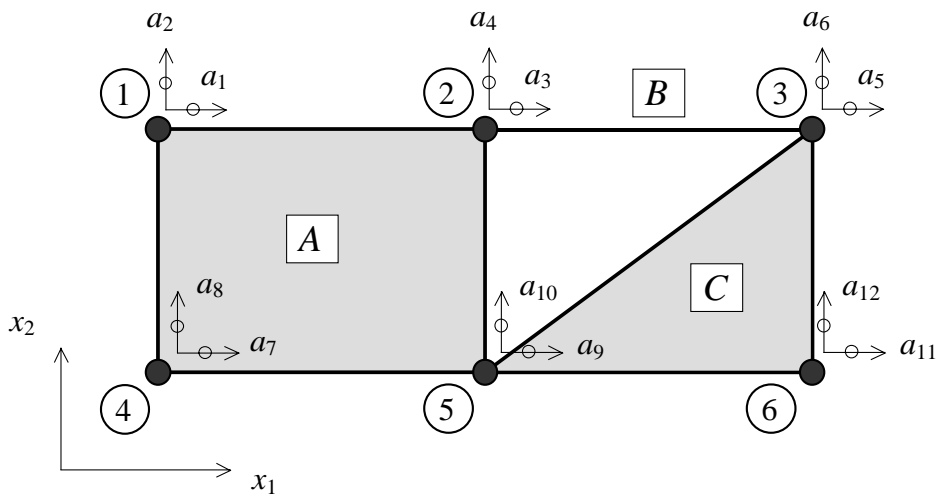


Fig. 8.1 - Estrutura constituída por um elemento de 4 nós (A), um elemento de 2 nós (B) e um elemento de 3 nós (C).

A estrutura representada na Figura 8.1 tem seis nós (1 a 6) e três elementos finitos (A, B e C). O elemento A tem quatro nós, o elemento B tem dois nós e o elemento C tem três nós. Em cada nó existem dois graus de liberdade. Em correspondência com os doze graus de liberdade da estrutura existem doze deslocamentos nodais ( $\underline{a}$ ) e doze forças nodais equivalentes à acção exterior ( $\underline{F}$ ).

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{31} \\ a_{32} \\ a_{41} \\ a_{42} \\ a_{51} \\ a_{52} \\ a_{61} \\ a_{62} \end{bmatrix} \quad \underline{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_{21} \\ F_{22} \\ F_{31} \\ F_{32} \\ F_{41} \\ F_{42} \\ F_{51} \\ F_{52} \\ F_{61} \\ F_{62} \end{bmatrix} \quad (1)$$

De acordo com (1), nas considerações que se seguem é adoptada a numeração dos graus de liberdade de 1 a 12.

Na relação de rigidez correspondente à estrutura

$$\underline{K} \underline{a} = \underline{F} \quad (2)$$

a matriz de rigidez global ( $\underline{K}$ ) é uma matriz 12x12.

Nas Figuras 8.2, 8.3 e 8.4 encontram-se representados os elementos finitos que vão ser assemblados e a respectiva numeração local (nós e graus de liberdade).

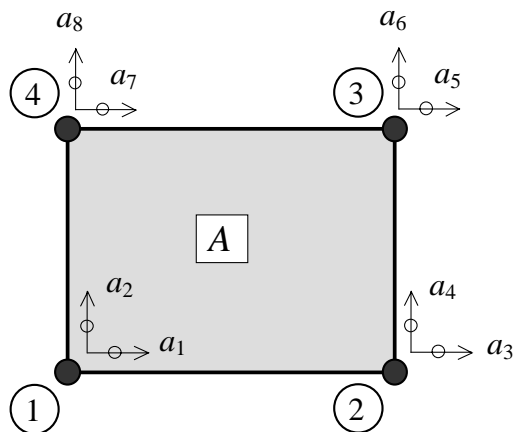


Fig. 8.2 - Numerações locais do elemento finito de 4 nós (A).

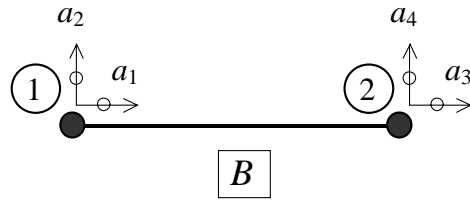


Fig. 8.3 - Numerações locais do elemento finito de 2 nós (B).

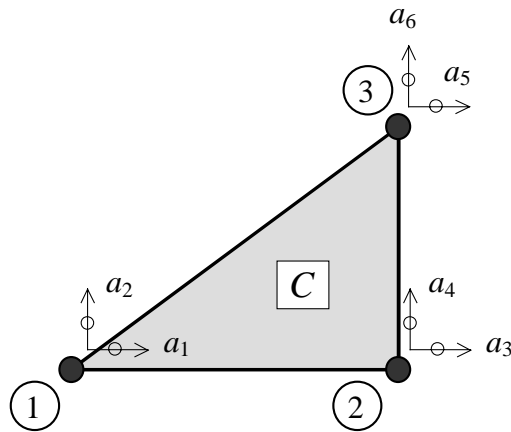


Fig. 8.4 - Numerações locais do elemento finito de 3 nós (C).

São as seguintes as matrizes de rigidez dos três elementos finitos no referencial geral

$$\text{Elemento A: } \underline{K}_g^A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} & A_{17} & A_{18} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} & A_{27} & A_{28} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} & A_{37} & A_{38} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} & A_{47} & A_{48} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} & A_{57} & A_{58} \\ A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} & A_{67} & A_{68} \\ A_{71} & A_{72} & A_{73} & A_{74} & A_{75} & A_{76} & A_{77} & A_{78} \\ A_{81} & A_{82} & A_{83} & A_{84} & A_{85} & A_{86} & A_{87} & A_{88} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\text{Elemento B: } \underline{K}_g^B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\text{Elemento } C: \underline{K}_g^C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Atendendo à numeração global dos graus de liberdade indicada na Figura 8.1 (1 a 12), as matrizes de rigidez dos elementos finitos passam a ser

$$\underline{K}^A = \begin{bmatrix} A_{77} & A_{78} & A_{75} & A_{76} & 0 & 0 & A_{71} & A_{72} & A_{73} & A_{74} & 0 & 0 \\ A_{87} & A_{88} & A_{85} & A_{86} & 0 & 0 & A_{81} & A_{82} & A_{83} & A_{84} & 0 & 0 \\ A_{57} & A_{58} & A_{55} & A_{56} & 0 & 0 & A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & 0 & 0 \\ A_{67} & A_{68} & A_{65} & A_{66} & 0 & 0 & A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{17} & A_{18} & A_{15} & A_{16} & 0 & 0 & A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & 0 & 0 \\ A_{27} & A_{28} & A_{25} & A_{26} & 0 & 0 & A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & 0 & 0 \\ A_{37} & A_{38} & A_{35} & A_{36} & 0 & 0 & A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & 0 & 0 \\ A_{47} & A_{48} & A_{45} & A_{46} & 0 & 0 & A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\underline{K}^B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\underline{K}^C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & C_{56} & 0 & 0 & C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{65} & C_{66} & 0 & 0 & C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{15} & C_{16} & 0 & 0 & C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{25} & C_{26} & 0 & 0 & C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{35} & C_{36} & 0 & 0 & C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{46} & 0 & 0 & C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix} \quad (8)$$

De acordo com o que foi exposto no Capítulo 3, a matriz de rigidez global é a soma de (6), (7) e (8), resultando

$$\underline{K} = \underline{K}^A + \underline{K}^B + \underline{K}^C =$$

$$\begin{bmatrix} A_{77} & A_{78} & A_{75} & A_{76} & 0 & 0 & A_{71} & A_{72} & A_{73} & A_{74} & 0 & 0 \\ A_{87} & A_{88} & A_{85} & A_{86} & 0 & 0 & A_{81} & A_{82} & A_{83} & A_{84} & 0 & 0 \\ A_{57} & A_{58} & A_{55} + B_{11} & A_{56} + B_{12} & B_{13} & B_{14} & A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & 0 & 0 \\ A_{67} & A_{68} & A_{65} + B_{21} & A_{66} + B_{22} & B_{23} & B_{24} & A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{31} & B_{32} & B_{33} + C_{55} & B_{34} + C_{56} & 0 & 0 & C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} \\ 0 & 0 & B_{41} & B_{42} & B_{43} + C_{65} & B_{44} + C_{66} & 0 & 0 & C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} \\ A_{17} & A_{18} & A_{15} & A_{16} & 0 & 0 & A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & 0 & 0 \\ A_{27} & A_{28} & A_{25} & A_{26} & 0 & 0 & A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & 0 & 0 \\ A_{37} & A_{38} & A_{35} & A_{36} & C_{15} & C_{16} & A_{31} & A_{32} & A_{33} + C_{11} & A_{34} + C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ A_{47} & A_{48} & A_{45} & A_{46} & C_{25} & C_{26} & A_{41} & A_{42} & A_{43} + C_{21} & A_{44} + C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{35} & C_{36} & 0 & 0 & C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{46} & 0 & 0 & C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Em correspondência com os graus de liberdade indicados nas Figuras 8.1 a 8.4, têm-se as forças nodais equivalentes às acções exteriores sobre a estrutura. Assim, e de acordo com o que foi exposto no Capítulo 3, são os seguintes os vectores solicitação correspondentes a cada elemento finito, atendendo à numeração global da estrutura

$$\underline{F}^A = \begin{bmatrix} F_7^A \\ F_8^A \\ F_5^A \\ F_6^A \\ 0 \\ 0 \\ F_1^A \\ F_2^A \\ F_3^A \\ F_4^A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{F}^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_1^B \\ F_2^B \\ F_3^B \\ F_4^B \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{F}^C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_5^C \\ F_6^C \\ 0 \\ 0 \\ F_1^C \\ F_2^C \\ F_3^C \\ F_4^C \end{bmatrix} \quad (10)$$

O vector  $\underline{F}$  é a soma destes três vectores

$$\underline{F} = \underline{F}^A + \underline{F}^B + \underline{F}^C = \begin{bmatrix} F_7^A \\ F_8^A \\ F_5^A + F_1^B \\ F_6^A + F_2^B \\ F_3^B + F_5^C \\ F_4^B + F_6^C \\ F_1^A \\ F_2^A \\ F_3^A + F_1^C \\ F_4^A + F_2^C \\ F_3^C \\ F_4^C \end{bmatrix} \quad (11)$$

A relação de rigidez correspondente à totalidade dos graus de liberdade, no referencial geral, é a seguinte (ver o Capítulo 3)

$$\left( \underline{K}^A + \underline{K}^B + \underline{K}^C \right) \underline{a} = \left( \underline{F}^A + \underline{F}^B + \underline{F}^C \right) \quad (12)$$

$$\underline{K} \underline{a} = \underline{F} \quad (13)$$

Depois de acrescentar a (13) as condições de apoio (ver o Capítulo 3), é possível resolver o sistema de equações lineares que daí resulta e obter os deslocamentos segundo todos os graus de liberdade da estrutura.

### 8.3 - Considerações finais

Neste capítulo foi apresentada a assemblagem da matriz de rigidez global com base no armazenamento de todos os seus termos. A matriz de rigidez global apresenta uma distribuição de termos particular, que, quando devidamente explorada, conduz a significativas economias de recursos informáticos, nomeadamente a redução do número de operações de cálculo e a diminuição da quantidade de memória consumida. A característica mais simples de explorar é o facto de a matriz de rigidez global ser simétrica, evitando-se assim o cálculo e o armazenamento dos termos do seu triângulo inferior, bem como todas as operações de cálculo que sobre eles teriam de ser efectuadas. Considerando apenas os termos do triângulo superior, é ainda vantajoso atender ao facto de muitos desses termos serem nulos. O critério de selecção da técnica de armazenamento dos termos da matriz depende do método que vai ser usado para resolver o sistema de equações. As técnicas de armazenamento mais comuns são as seguintes: armazenamento em semibanda de largura constante, armazenamento em semibanda de largura variável, armazenamento em *skyline* e armazenamento esparsos [8.2].

### BIBLIOGRAFIA

[8.1] - Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L. - The Finite Element Method, Fourth Edition, McGraw-Hill, 1988.

[8.2] - Cook, R. D.; Malkus, D. S.; Plesha, M. E.; Witt, R. J. - Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Fourth Edition, John Wiley & Sons, Inc., 2002.