

CAPÍTULO 9

FORÇAS NODAIS EQUIVALENTES

Quando um elemento finito se encontra sujeito a acções exteriores genéricas é necessário proceder ao cálculo das forças nodais equivalentes à solicitação exterior. Exemplos destas solicitações são as cargas concentradas num ponto do interior do elemento, as cargas distribuídas em bordos, as cargas distribuídas em faces e as forças de volume. Começa-se por apresentar a formulação genérica do cálculo das forças nodais equivalentes, seguindo-se um conjunto de exemplos ilustrativos dos procedimentos que, em cada caso, se devem adoptar.

9.1 - Simbologia

Apresenta-se em primeiro lugar um resumo da simbologia adoptada no estudo das forças nodais equivalentes a acções exteriores.

Tabela 9.1 - Simbologia relativa às forças nodais equivalentes a acções exteriores.

x	Coordenada cartesiana
P	Ponto onde actua uma carga concentrada
L	Arco onde actua uma carga distribuída por unidade de comprimento
S	Superfície onde actua uma carga distribuída por unidade de superfície
V	Volume onde actua uma carga distribuída por unidade de volume
Q	Carga concentrada
p	Carga distribuída por unidade de comprimento
q	Carga distribuída por unidade de superfície
b	Carga distribuída por unidade de volume
ε	Extensão

γ	Distorção
σ	Tensão normal
τ	Tensão tangencial
u	Campo de deslocamentos
a	Deslocamento nodal
B	Matriz de deformação
D	Matriz de elasticidade ($\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon}$)
C	Elemento da matriz de elasticidade (\underline{D})
E	Módulo de elasticidade ou módulo de Young
ν	Coefficiente de Poisson
N	Função interpoladora ou função de forma
K	Matriz de rigidez do elemento finito no referencial geral
F	Forças nodais equivalentes à acção exterior, nos graus de liberdade do elemento finito, no referencial geral
s	Coordenada local (curvilínea)
\bar{x}	Coordenada cartesiana de um nó de um elemento finito
\bar{s}	Coordenada local de um nó de um elemento finito
\bar{p}	Valor nodal da carga distribuída por unidade de comprimento
N_V	Vector das funções interpoladoras ou funções de forma
T	Matriz de transformação
\hat{n}	Versor
J	Jacobiano da transformação
ρ	Massa específica do material
g	Aceleração da gravidade

h	Espessura do elemento finito laminar
\bar{h}	Espessura do elemento finito num nó

9.2 - Expressões genéricas das forças nodais equivalentes

Na Figura 9.1 encontra-se representado um corpo tridimensional sujeito a diversos tipos de acções exteriores.

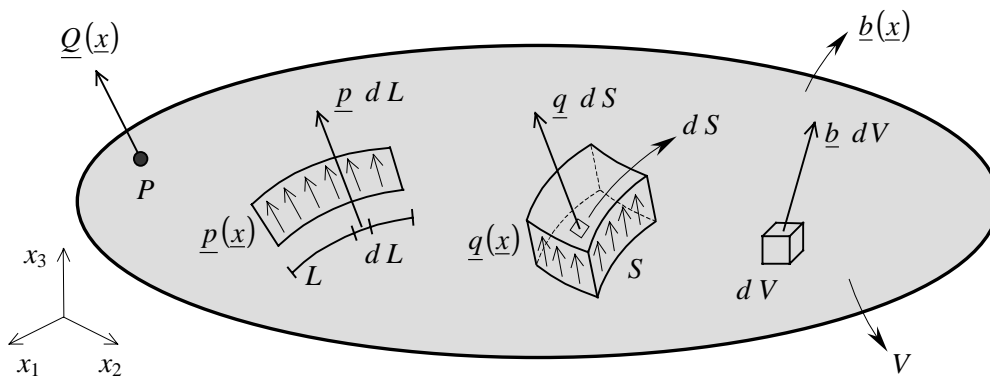


Fig. 9.1 - Corpo sujeito a diversos tipos de acções exteriores.

Os tipos de acções indicados na Figura 9.1 são os seguintes:

- Força generalizada $\underline{Q}(\underline{x})$ concentrada no ponto P . As componentes de $\underline{Q}(\underline{x})$ são três forças e três momentos.
- Acção distribuída por unidade de comprimento $\underline{p}(\underline{x})$. Esta carga actua ao longo da linha L , que se encontra definida no espaço e três dimensões. As componentes de $\underline{p}(\underline{x})$ são três forças por unidade de comprimento e três momentos por unidade de comprimento.
- Acção distribuída por unidade de superfície $\underline{q}(\underline{x})$. Esta carga actua na superfície S , que se encontra definida no espaço e três dimensões. As componentes de $\underline{q}(\underline{x})$ são três forças por unidade de superfície e três momentos por unidade de superfície.

- Força de volume $\underline{b}(\underline{x})$. Esta carga actua num volume V , que pode ser apenas uma parte do volume total do corpo. As componentes de $\underline{b}(\underline{x})$ são três forças por unidade de volume. Em problemas estáticos não são consideradas as componentes de momento por unidade de volume.

Todos os tipos de acções atrás referidos são definidos como funções das coordenadas cartesianas

$$\underline{x} = (x_1, x_2, x_3) \quad (1)$$

Na Figura 9.1 apenas foi indicado um exemplo de cada tipo de carga. Nas aplicações do MEF é habitual existirem diversos exemplares de cada tipo de carga, e.g., várias cargas concentradas em diferentes pontos do corpo, várias cargas distribuídas em distintas zonas, etc.

De acordo com o que foi exposto no Capítulo 4, o princípio dos trabalhos virtuais (PTV) estabelece que

$$\textit{Trabalho Interno} = \textit{Trabalho Externo} \quad (2)$$

Considerando todos os tipos de acções indicados na Figura 9.1 tem-se

$$\begin{aligned} \int_V \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dV = \\ = \sum_Q \delta \underline{u}^T \underline{Q} + \sum_p \int_L \delta \underline{u}^T \underline{p} dL + \sum_q \int_S \delta \underline{u}^T \underline{q} dS + \sum_b \int_V \delta \underline{u}^T \underline{b} dV \end{aligned} \quad (3)$$

Na exposição que se segue, não são consideradas as rotações nem os momentos. Assim, as componentes das diversas grandezas vectoriais que figuram em (3) são

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}; \quad \underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}; \quad \underline{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix}; \quad \underline{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}; \quad \underline{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}; \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Na formulação do MEF (ver o Capítulo 6), o campo de deformações é interpolado a partir dos deslocamentos nodais com a seguinte expressão

$$\underline{\varepsilon} = \underline{B} \underline{a} \quad (6)$$

Quando esta equação se refere aos deslocamentos virtuais e correspondentes deformações, também virtuais, tem-se

$$\delta \underline{\varepsilon} = \underline{B} \delta \underline{a} \quad (7)$$

que é equivalente a

$$\delta \underline{\varepsilon}^T = \delta \underline{a}^T \underline{B}^T \quad (8)$$

No caso geral tridimensional e em materiais isotrópicos, a relação entre tensões e deformações é a seguinte [9.1]

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_2 & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & C_1 & C_2 & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & C_2 & C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (9)$$

sendo

$$C_1 = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$C_2 = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (10)$$

$$C_3 = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

ou de um modo mais compacto

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon} \quad (11)$$

A matriz de elasticidade \underline{D} depende do módulo de Young (E) e do coeficiente de Poisson (ν).

Substituindo (6) em (11) resulta

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{B} \underline{a} \quad (12)$$

Na formulação do MEF (ver o Capítulo 6), considera-se que a interpolação do campo de deslocamentos a partir dos deslocamentos nodais é efectuada com a seguinte expressão

$$\underline{u} = \underline{N} \underline{a} \quad (13)$$

A equação (13) referida à deformação virtual é a seguinte

$$\delta \underline{u} = \underline{N} \delta \underline{a} \quad (14)$$

que é equivalente a

$$\delta \underline{u}^T = \delta \underline{a}^T \underline{N}^T \quad (15)$$

Substituindo todas estas equações em (3) passa a ter-se o PTV expresso por

$$\begin{aligned} \int_V \delta \underline{a}^T \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \underline{a} \, dV &= \\ &= \sum_Q \delta \underline{a}^T \underline{N}^T \underline{Q} + \sum_P \int_L \delta \underline{a}^T \underline{N}^T \underline{p} \, dL + \\ &+ \sum_q \int_S \delta \underline{a}^T \underline{N}^T \underline{q} \, dS + \sum_b \int_V \delta \underline{a}^T \underline{N}^T \underline{b} \, dV \end{aligned} \quad (16)$$

Uma vez que $dV = dx_1 dx_2 dx_3$ e os deslocamentos nodais não dependem das variáveis x_1, x_2 e x_3 , os vectores $\delta \underline{a}^T$ e \underline{a} podem passar para fora dos integrais

$$\begin{aligned}
 \delta \underline{a}^T \int_V \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dV \underline{a} &= \\
 &= \delta \underline{a}^T \sum_Q \underline{N}^T \underline{Q} + \delta \underline{a}^T \sum_p \int_L \underline{N}^T \underline{p} dL + \\
 &+ \delta \underline{a}^T \sum_q \int_S \underline{N}^T \underline{q} dS + \delta \underline{a}^T \sum_b \int_V \underline{N}^T \underline{b} dV
 \end{aligned} \tag{17}$$

De acordo com o PTV, a equação (17) é verdadeira para qualquer conjunto de deslocamentos virtuais, concluindo-se assim que

$$\begin{aligned}
 \int_V \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dV \underline{a} &= \\
 &= \sum_Q \underline{N}^T \underline{Q} + \sum_p \int_L \underline{N}^T \underline{p} dL + \sum_q \int_S \underline{N}^T \underline{q} dS + \sum_b \int_V \underline{N}^T \underline{b} dV
 \end{aligned} \tag{18}$$

Comparando esta equação com a relação de rigidez que é utilizada no método dos deslocamentos

$$\underline{K} \underline{a} = \underline{F} \tag{19}$$

tem-se, para o caso geral indicado na Figura 9.1

$$\underline{K} = \int_V \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dV \tag{20}$$

$$\underline{F} = \sum_Q \underline{F}^Q + \sum_p \underline{F}^p + \sum_q \underline{F}^q + \sum_b \underline{F}^b \tag{21}$$

sendo as forças nodais equivalentes a cada carga as seguintes

$$\underline{F}^Q = \underline{N}^T \underline{Q} \tag{22}$$

$$\underline{F}^p = \int_L \underline{N}^T \underline{p} dL \tag{23}$$

$$\underline{F}^q = \int_S \underline{N}^T \underline{q} dS \tag{24}$$

$$\underline{F}^b = \int_V \underline{N}^T \underline{b} dV \tag{25}$$

Exceptuando casos particulares, não se consegue uma precisão aceitável quando se discretiza um corpo com um único elemento finito. Por este motivo, deve-se considerar que as expressões (18)-(25) se referem a um elemento finito e que depois se procede à habitual assemblagem da matriz de rigidez global e do vector solicitação global (ver o Capítulo 8).

9.3 - Força concentrada num ponto interior

O cálculo das forças nodais equivalentes a uma acção concentrada num ponto interior ao elemento finito é exemplificado com um elemento de quatro nós para estados planos de tensão (ver a Figura 9.2).

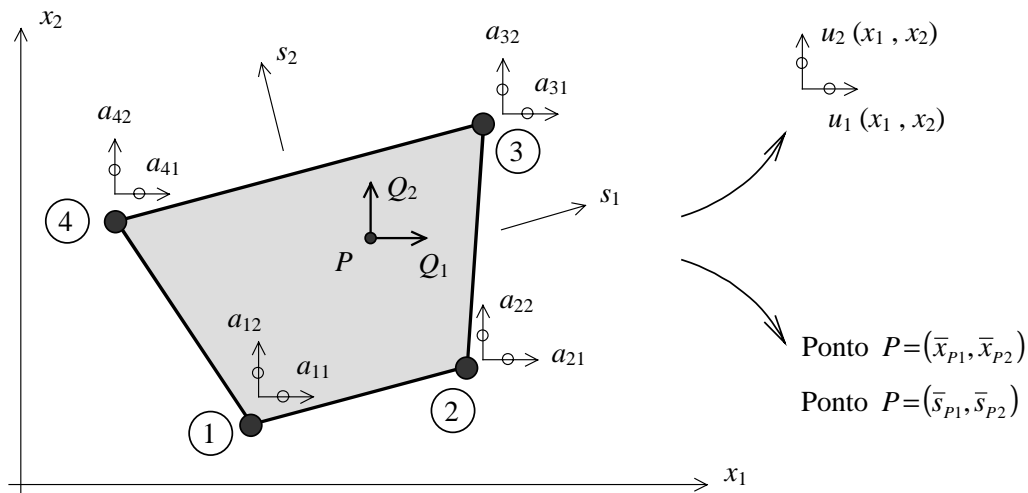


Fig. 9.2 - Elemento finito de quatro nós com uma força concentrado num ponto interior.

De acordo com os graus de liberdade indicados na Figura 9.2, são os seguintes os vectores dos deslocamentos nodais e das correspondentes forças nodais.

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{31} \\ a_{32} \\ a_{41} \\ a_{42} \end{bmatrix} ; \quad \underline{F} = \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_{21} \\ F_{22} \\ F_{31} \\ F_{32} \\ F_{41} \\ F_{42} \end{bmatrix} \quad (26)$$

No ponto P encontra-se aplicada uma força exterior com as seguintes componentes

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \quad (27)$$

As coordenadas locais do ponto P são

$$(s_1, s_2)_P = (\bar{s}_{P1}, \bar{s}_{P2}) \quad (28)$$

As funções de forma do elemento finito são as seguintes (ver o Capítulo 6)

$$\begin{cases} N_1(s_1, s_2) = (1-s_1)(1-s_2)/4 \\ N_2(s_1, s_2) = (1+s_1)(1-s_2)/4 \\ N_3(s_1, s_2) = (1+s_1)(1+s_2)/4 \\ N_4(s_1, s_2) = (1-s_1)(1+s_2)/4 \end{cases} \quad (29)$$

As forças nodais equivalentes à carga concentrada \underline{Q} são calculadas com a expressão (22), sendo a matriz \underline{N} constituída pelas funções de forma (29) avaliadas no ponto (28).

$$\begin{cases} \bar{N}_1 = (1-\bar{s}_{P1})(1-\bar{s}_{P2})/4 \\ \bar{N}_2 = (1+\bar{s}_{P1})(1-\bar{s}_{P2})/4 \\ \bar{N}_3 = (1+\bar{s}_{P1})(1+\bar{s}_{P2})/4 \\ \bar{N}_4 = (1-\bar{s}_{P1})(1+\bar{s}_{P2})/4 \end{cases} \quad (30)$$

De todas estas considerações resulta a seguinte expressão para o cálculo das forças nodais equivalentes à força \underline{Q}

$$\underline{F}^Q = \begin{bmatrix} F_{11}^Q \\ F_{12}^Q \\ F_{21}^Q \\ F_{22}^Q \\ F_{31}^Q \\ F_{32}^Q \\ F_{41}^Q \\ F_{42}^Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{N}_1 & 0 \\ 0 & \bar{N}_1 \\ \bar{N}_2 & 0 \\ 0 & \bar{N}_2 \\ \bar{N}_3 & 0 \\ 0 & \bar{N}_3 \\ \bar{N}_4 & 0 \\ 0 & \bar{N}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

A expressão (31) é facilmente avaliada desde que se conheçam as coordenadas locais (s_1, s_2) do ponto P . Contudo, na generalidade dos casos práticos o ponto P é definido pelas suas coordenadas cartesianas (x_1, x_2) . Esta questão requer uma operação preliminar, que consiste em calcular as coordenadas locais do ponto P a partir das suas coordenadas cartesianas. Este cálculo é efectuado com base na interpolação das coordenadas cartesianas, que foi apresentada no Capítulo 6, e que em seguida se reproduz

$$\begin{cases} x_1(s_1, s_2) = N_1(s_1, s_2) \bar{x}_{11} + N_2(s_1, s_2) \bar{x}_{21} + N_3(s_1, s_2) \bar{x}_{31} + N_4(s_1, s_2) \bar{x}_{41} \\ x_2(s_1, s_2) = N_1(s_1, s_2) \bar{x}_{12} + N_2(s_1, s_2) \bar{x}_{22} + N_3(s_1, s_2) \bar{x}_{32} + N_4(s_1, s_2) \bar{x}_{42} \end{cases} \quad (32)$$

Em (32), \bar{x}_{ij} representa a coordenada cartesiana do nó i segundo a direcção x_j . Substituindo em (32) x_1 e x_2 pelas coordenadas cartesianas do ponto P e N_i pelas funções de forma (29), resulta um sistema de duas equações não lineares com duas incógnitas (s_1 e s_2).

$$\begin{cases} \frac{1}{4}(1-s_1)(1-s_2) \bar{x}_{11} + \dots + \frac{1}{4}(1-s_1)(1+s_2) \bar{x}_{41} - \bar{x}_{P1} = 0 \\ \frac{1}{4}(1-s_1)(1-s_2) \bar{x}_{12} + \dots + \frac{1}{4}(1-s_1)(1+s_2) \bar{x}_{42} - \bar{x}_{P2} = 0 \end{cases} \quad (33)$$

que, de um modo mais compacto, se pode escrever da seguinte forma

$$\begin{cases} f_1(s_1, s_2) = 0 \\ f_2(s_1, s_2) = 0 \end{cases} \quad (34)$$

Este sistema de equações não lineares deve, em geral, ser resolvido por um método iterativo (e.g., método de Newton). A sua solução corresponde às coordenadas locais do ponto $P (\bar{s}_{p1}, \bar{s}_{p2})$.

9.4 - Carga distribuída por unidade de comprimento

Na Figura 9.3 encontra-se representado o elemento finito de oito nós da família *serendipity*, que, neste caso, se destina à discretização de estados planos de tensão. Num dos bordos existe uma carga distribuída por unidade de comprimento $\underline{p}(\underline{x})$.

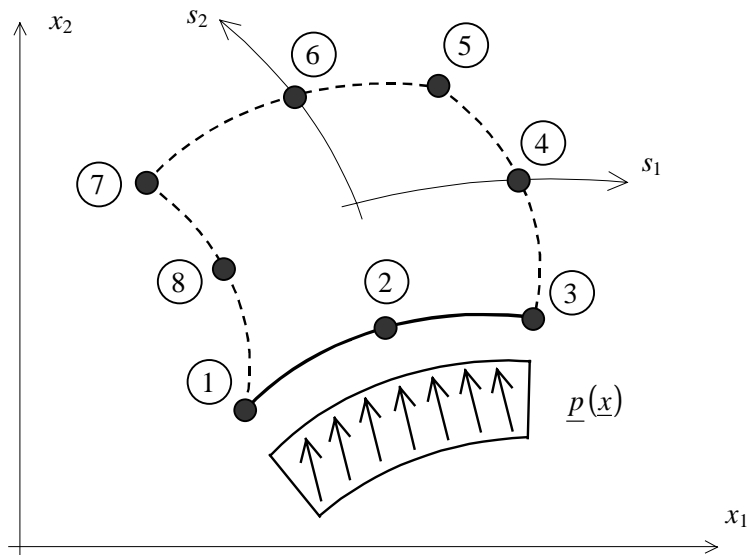


Fig. 9.3 - Elemento finito de oito nós com uma carga distribuída por unidade de comprimento.

As funções de forma do elemento de oito nós são as seguintes

$$\begin{cases} N_1(s_1, s_2) = (1 - s_1)(1 - s_2)(-1 - s_1 - s_2) / 4 \\ N_2(s_1, s_2) = (1 - s_1^2)(1 - s_2) / 2 \\ N_3(s_1, s_2) = (1 + s_1)(1 - s_2)(-1 + s_1 - s_2) / 4 \\ N_4(s_1, s_2) = (1 + s_1)(1 - s_2^2) / 2 \\ N_5(s_1, s_2) = (1 + s_1)(1 + s_2)(-1 + s_1 + s_2) / 4 \\ N_6(s_1, s_2) = (1 - s_1^2)(1 + s_2) / 2 \\ N_7(s_1, s_2) = (1 - s_1)(1 + s_2)(-1 - s_1 + s_2) / 4 \\ N_8(s_1, s_2) = (1 - s_1)(1 - s_2^2) / 2 \end{cases} \quad (35)$$

As interpolações das grandezas correspondentes ao bordo carregado são efectuadas com as seguintes funções de forma, que se obtêm substituindo s_2 por -1 em (35). Note-se ainda que em todos os pontos do domínio de integração do integral (23) a variável s_2 assume o valor -1.

$$\begin{cases} \bar{N}_1(s_1) = (s_1^2 - s_1)/2 \\ \bar{N}_2(s_1) = 1 - s_1^2 \\ \bar{N}_3(s_1) = (s_1^2 + s_1)/2 \\ \bar{N}_4(s_1) = 0 \\ \bar{N}_5(s_1) = 0 \\ \bar{N}_6(s_1) = 0 \\ \bar{N}_7(s_1) = 0 \\ \bar{N}_8(s_1) = 0 \end{cases} \quad (36)$$

Estas funções de forma coincidem com as que foram obtidas no Capítulo 4 para o elemento unidimensional de três nós.

Na Figura 9.4 está representado o eixo tangente ao bordo (x'_1), bem como o eixo normal ao bordo (x'_2). O eixo tangente ao bordo segue a numeração local dos nós. O eixo x'_2 forma com x'_1 um referencial directo.

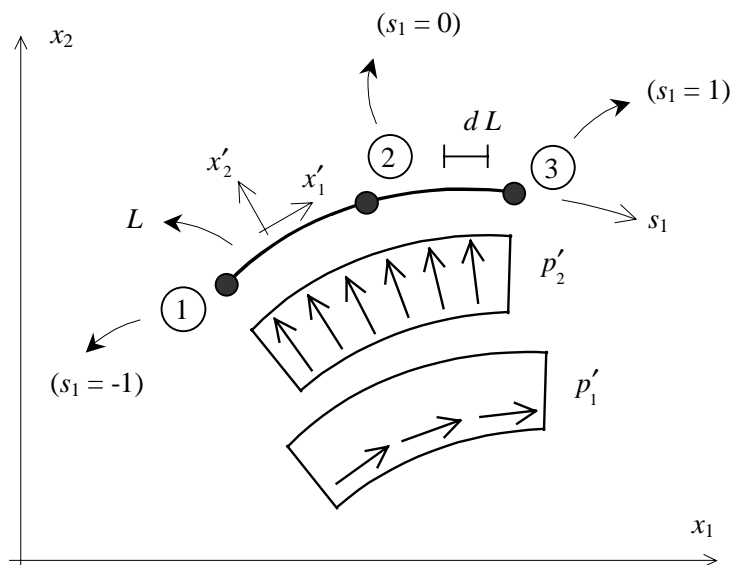


Fig. 9.4 - Bordo de três nós com uma carga distribuída por unidade de comprimento.

A carga distribuída $\underline{p}(x_1, x_2)$ é decomposta nas suas componentes tangencial (p'_1) e normal (p'_2). Numa análise por elementos finitos são habitualmente conhecidos os valores nodais das componentes tangencial e normal da carga distribuída, que se designam por \bar{p}'_{ij} , i.e., valor da carga distribuída no nó i , segundo a direcção x'_j . Todas as grandezas relativas às cargas distribuídas são forças por unidade de comprimento de arco.

A interpolação das componentes tangencial e normal da carga distribuída a partir dos correspondentes valores nodais é efectuada da forma habitual, recorrendo às funções de forma (36)

$$\begin{cases} p'_1(s_1) = \bar{N}_1(s_1) \bar{p}'_{11} + \bar{N}_2(s_1) \bar{p}'_{21} + \bar{N}_3(s_1) \bar{p}'_{31} \\ p'_2(s_1) = \bar{N}_1(s_1) \bar{p}'_{12} + \bar{N}_2(s_1) \bar{p}'_{22} + \bar{N}_3(s_1) \bar{p}'_{32} \end{cases} \quad (37)$$

ou

$$\begin{bmatrix} p'_1 \\ p'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{p}'_{11} & \bar{p}'_{21} & \bar{p}'_{31} \\ \bar{p}'_{12} & \bar{p}'_{22} & \bar{p}'_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{N}_1 \\ \bar{N}_2 \\ \bar{N}_3 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\underline{p}' = \underline{\bar{p}}'^T \bar{N}_v \quad (39)$$

Designando por \underline{T} a matriz de transformação do referencial (x_1, x_2) para o referencial (x'_1, x'_2) , tem-se

$$\underline{p}' = \underline{T} \underline{p} \quad (40)$$

e a relação inversa

$$\underline{p} = \underline{T}^T \underline{p}' \quad (41)$$

Substituindo (39) em (41) chega-se a

$$\underline{p} = \underline{T}^T \underline{\bar{p}}'^T \bar{N}_v \quad (42)$$

A primeira linha da matriz de transformação \underline{T} utilizada em (40) é constituída pelo versor \hat{n}_1 e a segunda pelo versor \hat{n}_2 (ver a Figura 9.5).

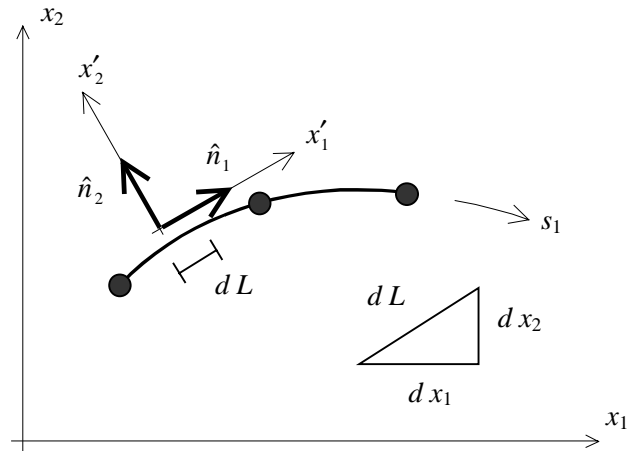


Fig. 9.5 - Referencial tangente ao bordo.

O versor \hat{n}_1 obtém-se com a seguinte expressão

$$\hat{n}_1 = \frac{1}{J} \left(\frac{d x_1}{d s_1}, \frac{d x_2}{d s_1} \right) \quad (43)$$

sendo J a norma do vector $\left(\frac{d x_1}{d s_1}, \frac{d x_2}{d s_1} \right)$

$$J = \sqrt{\left(\frac{d x_1}{d s_1} \right)^2 + \left(\frac{d x_2}{d s_1} \right)^2} \quad (44)$$

O versor \hat{n}_2 é ortogonal a \hat{n}_1 e forma com \hat{n}_1 um referencial directo, sendo a seguinte a sua expressão

$$\hat{n}_2 = \frac{1}{J} \left(-\frac{d x_2}{d s_1}, \frac{d x_1}{d s_1} \right) \quad (45)$$

Os elementos da matriz de transformação \underline{T} são os seguintes

$$\underline{T} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{d x_1}{d s_1} & \frac{d x_2}{d s_1} \\ -\frac{d x_2}{d s_1} & \frac{d x_1}{d s_1} \end{bmatrix} \quad (46)$$

Os elementos da matriz \underline{T} são calculados com base na seguinte interpolação das coordenadas de um ponto genérico do arco L .

$$\begin{cases} x_1(s_1) = \bar{N}_1(s_1) \bar{x}_{11} + \bar{N}_2(s_1) \bar{x}_{21} + \bar{N}_3(s_1) \bar{x}_{31} \\ x_2(s_1) = \bar{N}_1(s_1) \bar{x}_{12} + \bar{N}_2(s_1) \bar{x}_{22} + \bar{N}_3(s_1) \bar{x}_{32} \end{cases} \quad (47)$$

Nesta expressão \bar{N}_i são as funções de forma associadas aos nós do arco (36) e \bar{x}_{ij} representa a coordenada cartesiana do nó i segundo a direcção x_j . Derivando ambos os membros em ordem a s_1 chega-se a

$$\begin{cases} \frac{d x_1}{d s_1} = \frac{d \bar{N}_1}{d s_1} \bar{x}_{11} + \frac{d \bar{N}_2}{d s_1} \bar{x}_{21} + \frac{d \bar{N}_3}{d s_1} \bar{x}_{31} \\ \frac{d x_2}{d s_1} = \frac{d \bar{N}_1}{d s_1} \bar{x}_{12} + \frac{d \bar{N}_2}{d s_1} \bar{x}_{22} + \frac{d \bar{N}_3}{d s_1} \bar{x}_{32} \end{cases} \quad (48)$$

As derivadas em ordem a s_1 das funções de forma (36) são

$$\begin{cases} \frac{d \bar{N}_1}{d s_1} = s_1 - \frac{1}{2} \\ \frac{d \bar{N}_2}{d s_1} = -2s_1 \\ \frac{d \bar{N}_3}{d s_1} = s_1 + \frac{1}{2} \end{cases} \quad (49)$$

Para calcular as forças nodais equivalentes à carga distribuída no bordo deve-se utilizar a expressão (23), que em seguida se reproduz

$$\underline{F}^p = \int_L \underline{N}^T \underline{p} dL \quad (50)$$

Para facilitar o recurso à quadratura de Gauss (ver o Capítulo 5), deve ser efectuada a seguinte mudança de variável

$$\underline{F}^p = \int_{-1}^{+1} \underline{N}^T \underline{p} \frac{dL}{ds_1} ds_1 \quad (51)$$

De acordo com a Figura 9.5, verifica-se que

$$dL = \sqrt{(dx_1)^2 + (dx_2)^2} \quad (52)$$

Atendendo a (47), tem-se

$$\begin{cases} dx_1 = \frac{dx_1}{ds_1} ds_1 \\ dx_2 = \frac{dx_2}{ds_1} ds_1 \end{cases} \quad (53)$$

Substituindo (53) em (52), chega-se a

$$\frac{dL}{ds_1} = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{ds_1}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{ds_1}\right)^2} \quad (54)$$

Comparando (54) com (44), conclui-se que

$$\frac{dL}{ds_1} = J \quad (55)$$

e a expressão (51) passa a ser

$$\underline{F}^p = \int_{-1}^{+1} \underline{N}^T \underline{p} J ds_1 \quad (56)$$

Substituindo (42) em (56), obtém-se

$$\underline{F}^p = \int_{-1}^{+1} \underline{N}^T \underline{T}^T \underline{\bar{p}}^T \bar{N}_v J ds_1 \quad (57)$$

Uma vez que em todo o domínio de integração se verifica ser $s_2 = -1$, na matriz \underline{N} devem ser utilizadas as funções de forma (36).

Considerando todas as expressões já deduzidas, o vector das forças nodais equivalentes à carga distribuída indicada nas Figuras 9.3 e 9.4 é o seguinte

$$\underset{(16 \times 1)}{\underline{F}^p} = \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} \bar{N}_1 & 0 \\ 0 & \bar{N}_1 \\ \bar{N}_2 & 0 \\ 0 & \bar{N}_2 \\ \bar{N}_3 & 0 \\ 0 & \bar{N}_3 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{ds_1} & -\frac{dx_2}{ds_1} \\ \frac{dx_2}{ds_1} & \frac{dx_1}{ds_1} \\ \frac{dx_2}{ds_1} & \frac{dx_1}{ds_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p}'_{11} & \bar{p}'_{21} & \bar{p}'_{31} \\ \bar{p}'_{12} & \bar{p}'_{22} & \bar{p}'_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{N}_1 \\ \bar{N}_2 \\ \bar{N}_3 \end{bmatrix} J ds_1 \quad (58)$$

que se simplifica para

$$\begin{bmatrix} F_{11}^p \\ F_{12}^p \\ F_{21}^p \\ F_{22}^p \\ F_{31}^p \\ F_{32}^p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} \bar{N}_1 & 0 \\ 0 & \bar{N}_1 \\ \bar{N}_2 & 0 \\ 0 & \bar{N}_2 \\ \bar{N}_3 & 0 \\ 0 & \bar{N}_3 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{ds_1} & -\frac{dx_2}{ds_1} \\ \frac{dx_2}{ds_1} & \frac{dx_1}{ds_1} \\ \frac{dx_2}{ds_1} & \frac{dx_1}{ds_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p}'_{11} & \bar{p}'_{21} & \bar{p}'_{31} \\ \bar{p}'_{12} & \bar{p}'_{22} & \bar{p}'_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{N}_1 \\ \bar{N}_2 \\ \bar{N}_3 \end{bmatrix} ds_1 \quad (59)$$

No vector \underline{F}^p apenas as seis primeiras componentes são não nulas, i.e., nos nós 1, 2 e 3 (ver a Figura 9.3) existem forças nodais equivalentes, enquanto que nos restantes cinco nós a contribuição da carga distribuída é nula.

O integral (59) pode ser calculado recorrendo à quadratura de Gauss (ver o Capítulo 5).

Todos os componentes da função integranda de (59) são funções de s_1 ou são constantes de valor conhecido, como é o caso da matriz $\underline{\bar{p}'}$.

9.5 - Carga distribuída por unidade de superfície

O cálculo das forças nodais equivalentes a uma carga distribuída por unidade de superfície é efectuado com a expressão (24). Este tipo de cargas só tem interesse prático em elementos de laje, elementos de casca e faces de elementos sólidos (*bricks*). O processo de cálculo de \underline{F}^q é semelhante ao apresentado na Secção 9.4, sendo necessário adaptá-lo às características dos referidos elementos. O domínio de integração passa a ser uma superfície.

9.6 - Carga distribuída por unidade de volume

Este tipo de acção é devido à presença de forças de volume $\underline{b}(\underline{x})$. Estas forças estão presentes sempre que o corpo se encontra sujeito a uma aceleração. O caso mais comum é o da aceleração da gravidade que se define do seguinte modo

$$\underline{b} = \rho \underline{g} \quad (60)$$

Nesta expressão, ρ é a massa específica do material e \underline{g} é a aceleração da gravidade. No caso mais comum, i.e., supondo que o eixo x_3 é vertical e orientado para cima, que a aceleração da gravidade actua segundo x_3 e é negativa e que se utilizam as unidades do Sistema Internacional (SI), tem-se

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.81 \end{bmatrix} \quad (61)$$

Em (61), a aceleração da gravidade foi considerada igual a -9.81 m/s^2 .

As unidades de b e de ρ devem ser as seguintes:

- b_i em N/m^3 e ρ em kg/m^3 , ou
- b_i em kN/m^3 e ρ em t/m^3 , ou
- b_i em MN/m^3 e ρ em kt/m^3 .

Ao definir o peso próprio deste modo, é facilitada a sua combinação com outras componentes da aceleração \underline{g} .

Se a única força de volume for a devida ao peso próprio, então pode-se atribuir a ρ o valor do peso específico do material e considerar $\underline{g} = (0,0,-1)$. Deste modo fica facilitada a preparação dos dados de uma análise por elementos finitos em que é utilizado um sistema de unidades distinto do SI.

As forças nodais equivalentes às forças de volume são calculadas com a expressão (25), que em seguida se reproduz

$$\underline{F}^b = \int_V \underline{N}^T \underline{b} dV \quad (62)$$

Na Figura 9.6 encontra-se representado um elemento finito de quatro nós destinado à discretização de estados planos de tensão.

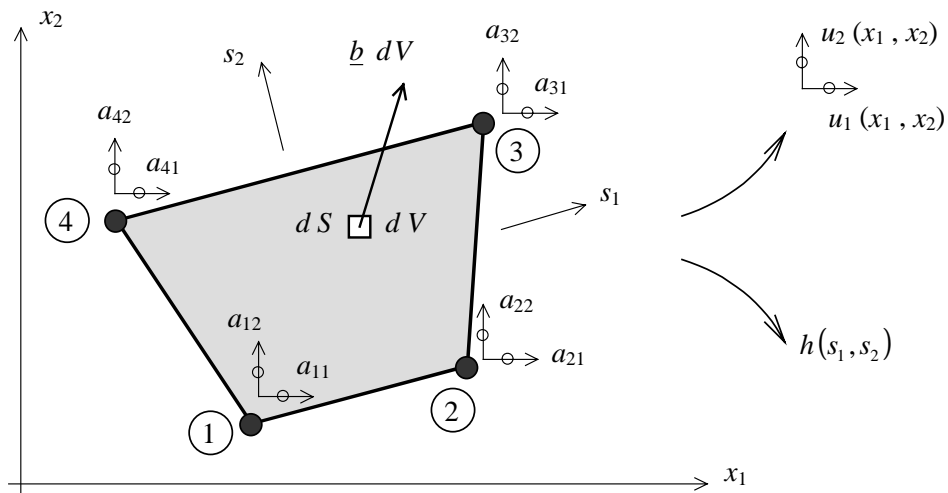


Fig. 9.6 - Elemento finito de quatro nós sujeito a forças de volume.

No elemento representado na Figura 9.6 actuam forças de volume $\underline{b}(\underline{x})$, cujas componentes são

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (63)$$

No caso do estado plano de tensão, o integral (62) passa a

$$\underline{F}^b = \int_S \underline{N}^T \underline{b} h dS \quad (64)$$

Nesta expressão, h corresponde à espessura do elemento finito, que pode eventualmente ser não constante. A sua interpolação a partir das espessuras nos nós (\bar{h}_i) é efectuada com a seguinte expressão (ver o Capítulo 6)

$$h(s_1, s_2) = N_1(s_1, s_2) \bar{h}_1 + N_2(s_1, s_2) \bar{h}_2 + N_3(s_1, s_2) \bar{h}_3 + N_4(s_1, s_2) \bar{h}_4 \quad (65)$$

De um modo semelhante ao que foi efectuado no Capítulo 6 para a matriz de rigidez, deve ser efectuada em (64) a seguinte mudança de variável

$$\underline{F}^b = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \underline{N}^T \underline{b} h J d s_1 d s_2 \quad (66)$$

Nesta expressão, J é o determinante Jacobiano definido no Capítulo 6.

Uma vez que \underline{N} é a matriz que relaciona os deslocamentos nodais com o campo de deslocamentos ($\underline{u} = \underline{N} \underline{a}$) (ver o Capítulo 6), chega-se à seguinte expressão final

$$\begin{bmatrix} F_{11}^b \\ F_{12}^b \\ F_{21}^b \\ F_{22}^b \\ F_{31}^b \\ F_{32}^b \\ F_{41}^b \\ F_{42}^b \end{bmatrix} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \\ N_4 & 0 \\ 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} h J d s_1 d s_2 \quad (67)$$

Nesta expressão, os componentes da função integranda são funções de s_1 e s_2 , ou são constantes.

O integral (67) pode ser calculado recorrendo à quadratura de Gauss (ver o Capítulo 5).

9.7 - Considerações finais

As deduções relativas a casos particulares, que foram apresentadas neste capítulo, podem ser facilmente adaptadas a outros casos, tais como elementos finitos com mais nós, outros tipos de elementos finitos, meios com rotações e momentos, etc.

BIBLIOGRAFIA

[9.1] - Azevedo, A. F. M. - Mecânica dos Sólidos, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1996.

[9.2] - Hinton, E.; Owen, D. R. - Finite Element Programming, Academic Press, 1980.

[9.3] - Kreyszig, E. - Advanced Engineering Mathematics, Sixth Edition, John Wiley & Sons, Inc., 1988.

[9.4] - Cook, R. D.; Malkus, D. S.; Plesha, M. E.; Witt, R. J. - Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Fourth Edition, John Wiley & Sons, Inc., 2002.

