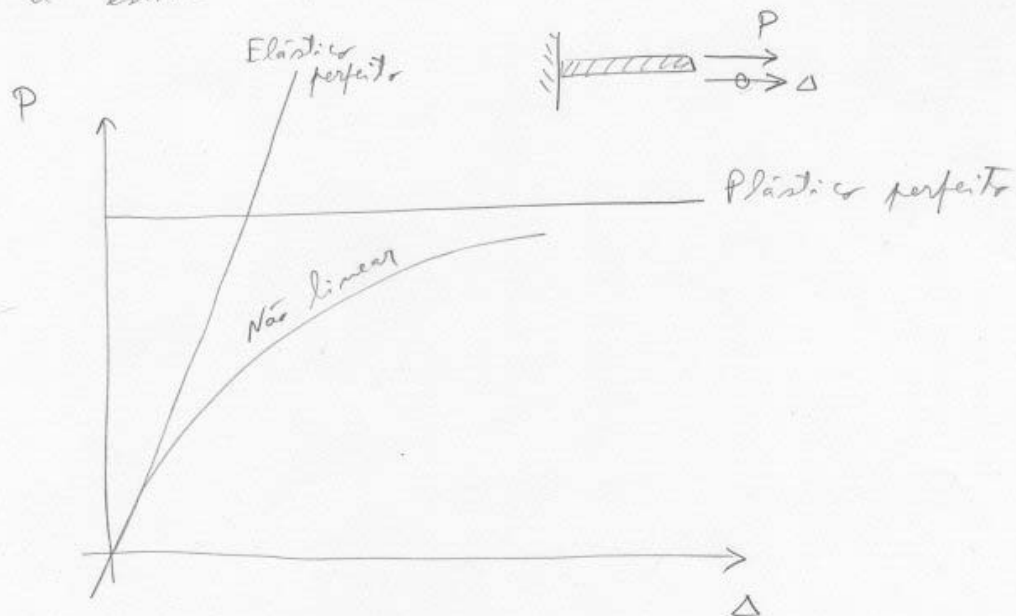


Resumo
Alvaro Azeredo
Dezembro 2003

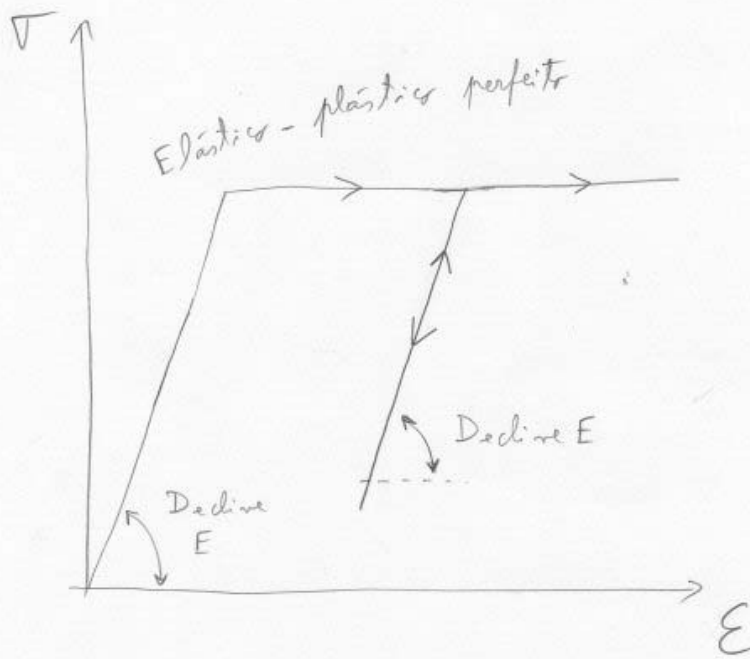
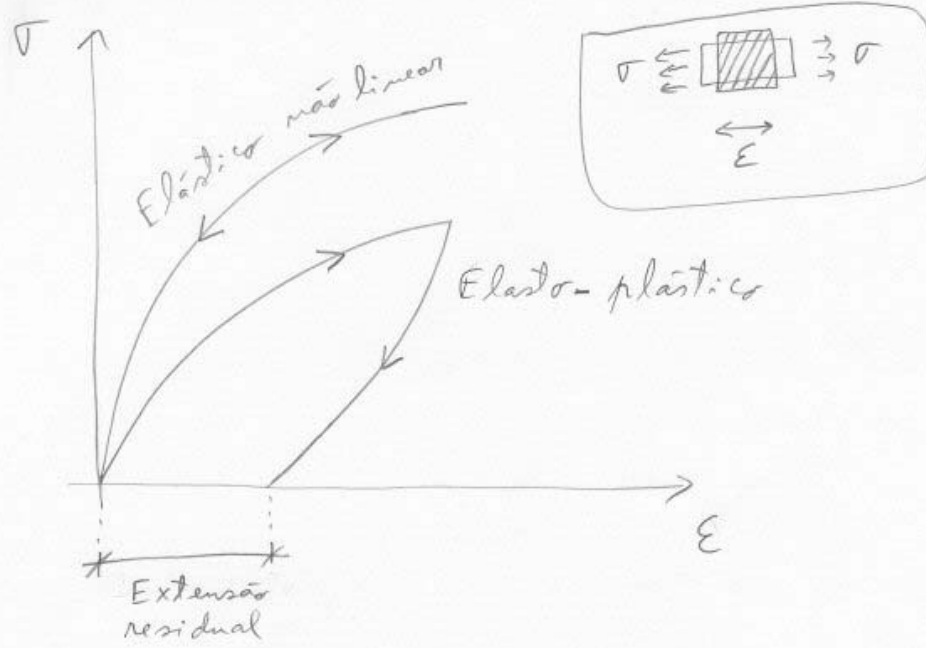
Estruturas {
Isostáticas → esforços obtêm-se recorrendo apenas a equações de equilíbrio estático
Hiperestáticas → esforços dependem também do comportamento da estrutura

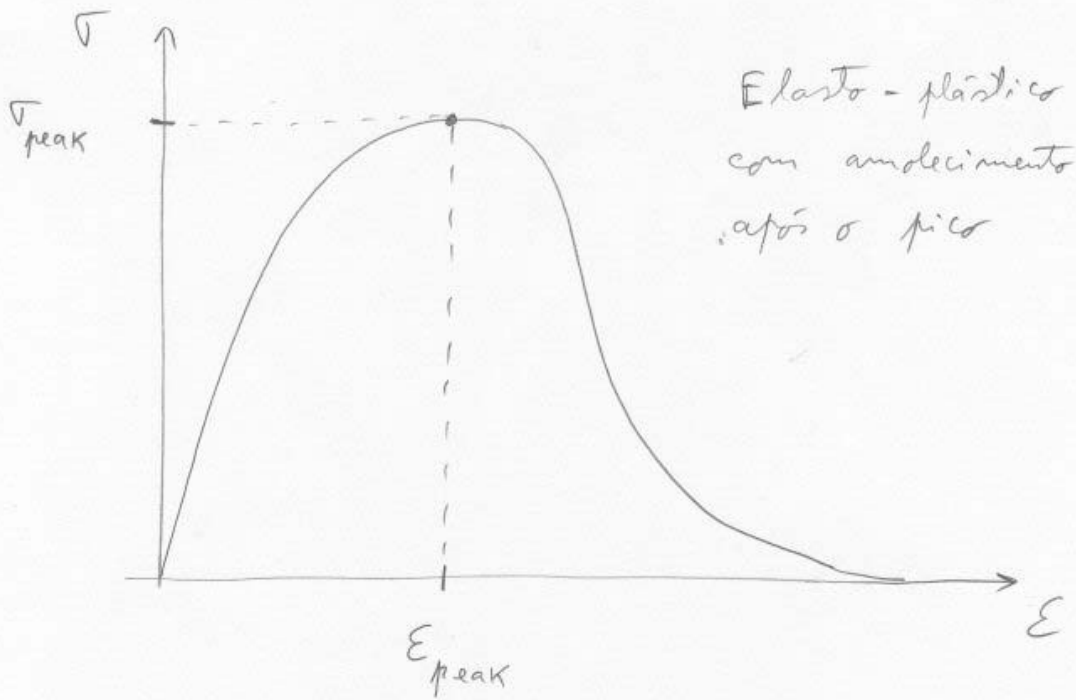
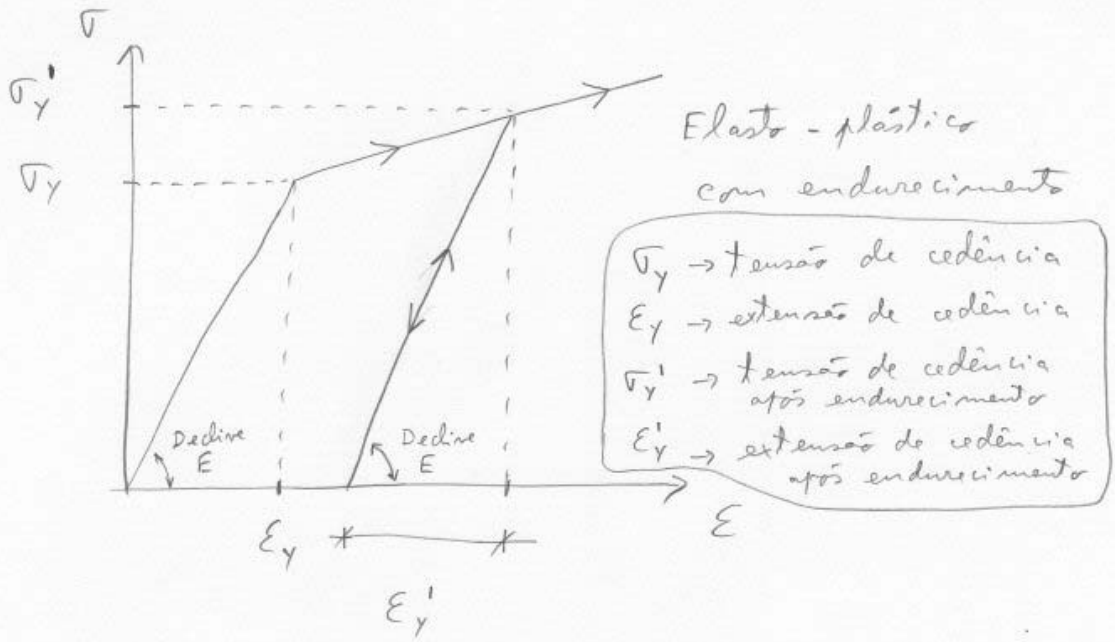
- Estruturas sujeitas a pequenos deslocamentos e, conseqüentemente, a pequenas deformações.
- Geometria inicial serve sempre como referência.
- Comportamento do material que constitui a estrutura:

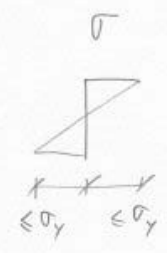
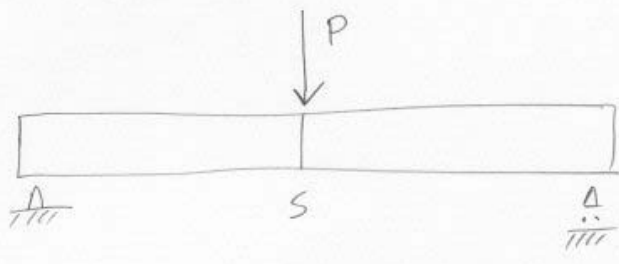


Elastico perfeito → Lei de Hooke generalizada

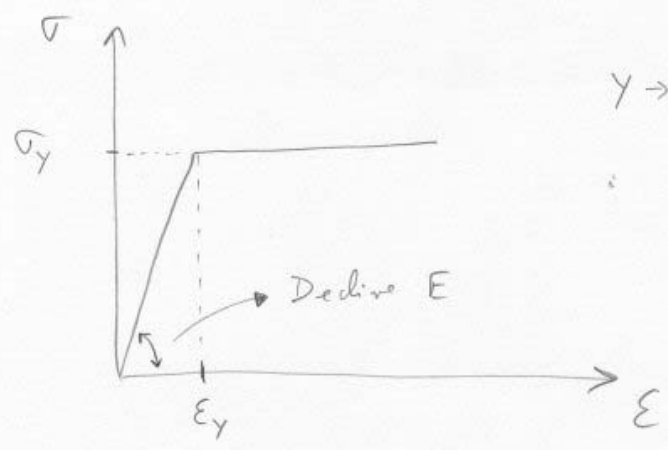
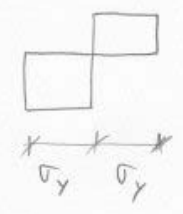
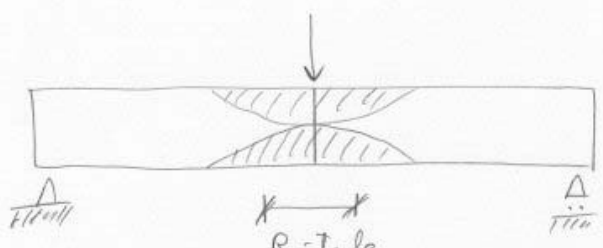
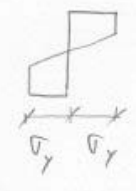
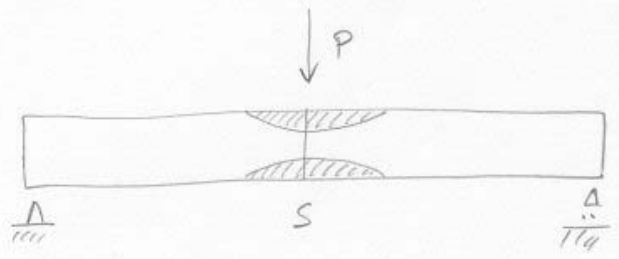
Tipos de comportamento não linear material: (MBA-2)







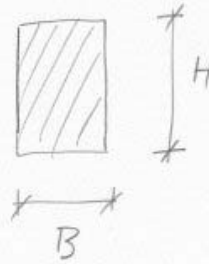
Zona plastificada



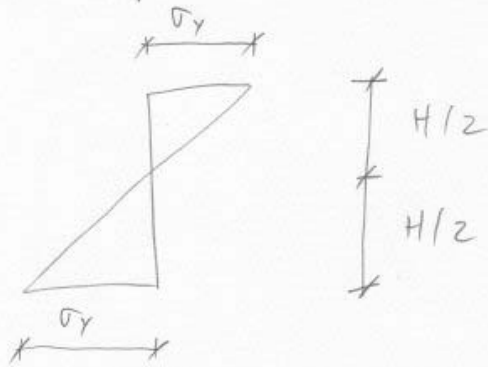
y → yield → cedência

$$E = \frac{\sigma_y}{\epsilon_y} \quad (\Leftrightarrow) \quad \sigma_y = E \epsilon_y$$

Seção retangular



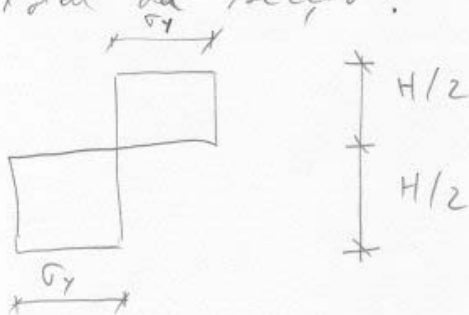
Momento fletor correspondente ao início da plastificação:



$$M_y = 2 \left(\frac{\sigma_y H/2}{2} B \right) \frac{2}{3} \frac{H}{2} = \frac{\sigma_y B H}{2} \frac{H}{3}$$

$$M_y = \sigma_y \frac{B H^2}{6}$$

Momento fletor correspondente à plastificação total da seção:



$$M_p = 2 \left(\sigma_y \frac{H}{2} B \right) \frac{1}{2} \frac{H}{2} = \sigma_y B H \frac{H}{4}$$

$$M_p = \sigma_y \frac{B H^2}{4}$$

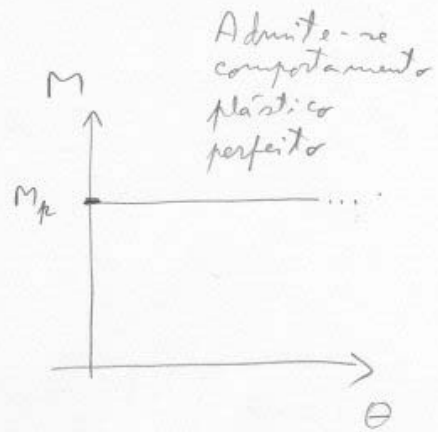
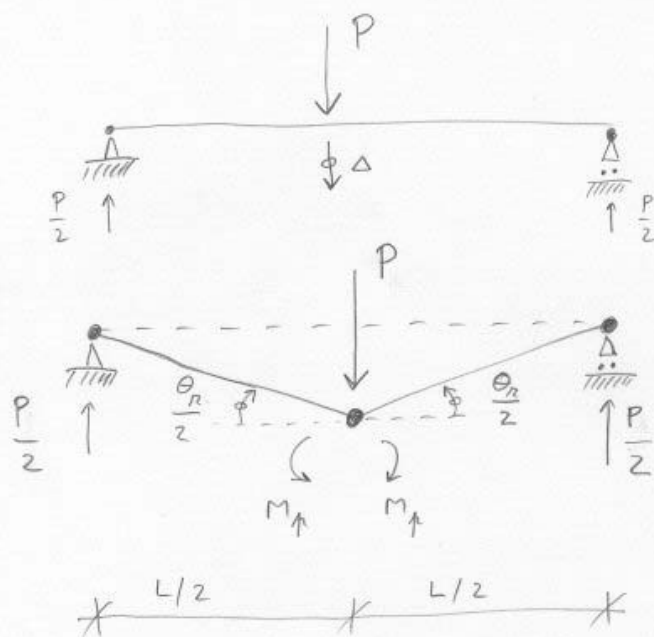
$$\frac{M_p}{M_y} = 1.5$$

$$M_p = 1.5 M_y$$

Análise de estruturas hiperestáticas com comportamento elástico linear:

- método das forças
- método dos deslocamentos
- método misto

Rótula plástica



$\theta_n \rightarrow$ rotação relativa entre o trecho à esquerda da rótula e o trecho à sua direita

Equações de equilíbrio de momentos do trecho à esquerda da rótula plástica:

$$\frac{P}{2} \cdot \frac{L}{2} = M_p \Leftrightarrow P = \frac{4 M_p}{L}$$

Teorema dos Trabalhos Virtuais

MBA - 7

Trabalho externo = Trabalho interno

$$P \Delta = 2 \left(M_p \frac{\theta_n}{2} \right)$$

$$\left(\frac{\theta_n}{2} = \frac{\Delta}{L/2} \Leftrightarrow \Delta = \theta_n \frac{L}{4} \right)$$

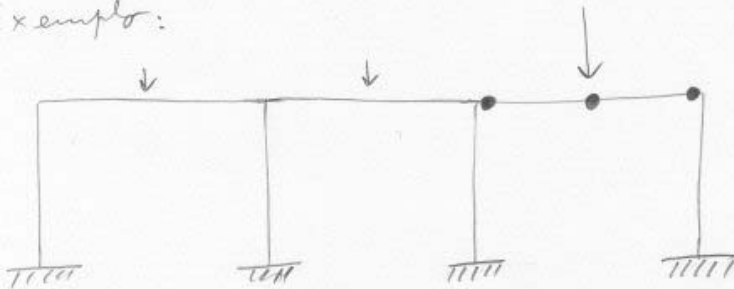
$$P \theta_n \frac{L}{4} = M_p \theta_n \Leftrightarrow P = \frac{4 M_p}{L}$$

Estrutura n vezes hiperestática:

- com n rótulas plásticas \rightarrow isostática
- com $n+1$ rótulas plásticas \rightarrow hiperestática

Exceção: colapsos parciais da estrutura

Exemplo:



Teorema estático:

- a verdadeira solicitação de rotura é a maior das solicitações que correspondem a um diagrama de momentos estaticamente admissível, i.e., um diagrama que satisfaça todas as condições de equilíbrio estático, com $M \leq M_p$ em todas as secções transversais.

Teorema cinemático:

- a verdadeira solicitação de rotura é a menor das solicitações que se podem obter dispendo rótulas plásticas em locais arbitrários do sistema e calculando a solicitação que corresponde ao mecanismo assim criado.

Teorema da unicidade:

- a solução correspondente ao teorema estático coincide com a correspondente ao teorema cinemático.

Procedimentos práticos baseados no teorema da unicidade

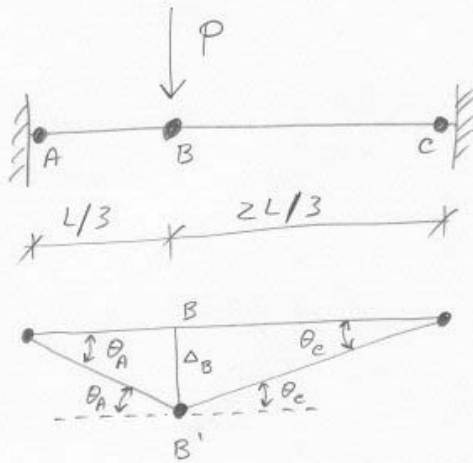
- - estudar um possível mecanismo de rotura, dispendo rótulas plásticas em números e localizações adequadas à formação desse mecanismo;
- verificar se para a carga correspondente a esse mecanismo o diagrama de momentos é admissível ($M \leq M_p$ em todas as secções);
- se isto for verdade \Rightarrow FIM
senão, tentar outros mecanismos

Método cinemático

MBA-9

- Considerar todos os mecanismos de ruína possíveis
- Calcular o fator de carga λ correspondente
- à formação de cada um desses mecanismos
- De acordo com o teorema cinemático,
a solução é a que corresponde ao menor λ

No final deve-se verificar se o diagrama de momentos é admissível (verificação opcional)
($M \leq M_k$)

Exemplo 1

$$\overline{BB'} = \Delta_B = \theta_A \frac{L}{3}$$

$$\theta_c = \frac{\Delta_B}{\frac{2L}{3}} = \frac{\theta_A}{2}$$

$$\theta_B = \theta_A + \theta_c$$

$$\theta_B = \theta_A + \frac{\theta_A}{2} = \frac{3}{2} \theta_A$$

Por Teorema dos Trabalhos Virtuais:

$$P \Delta_B = M_A \theta_A + M_B \theta_B + M_C \theta_c$$

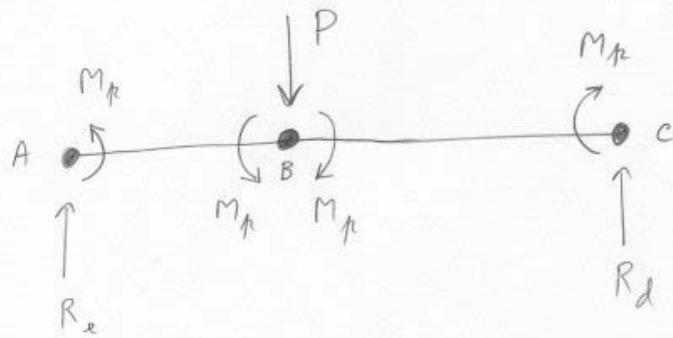
$$P \theta_A \frac{L}{3} = M_A \left(\theta_A + \frac{3}{2} \theta_A + \frac{1}{2} \theta_A \right)$$

$$P \frac{L}{3} = 3 M_A$$

$$P = 9 \frac{M_A}{L}$$

Neste caso simples não existem outros mecanismos de colapso a estudar.

Resolução do mesmo problema
por condições de equilíbrio:



Momentos em relação ao ponto B

- Equilíbrio de \overline{AB}

$$R_e \frac{L}{3} = 2 M_A \Rightarrow R_e = 6 \frac{M_A}{L}$$

- Equilíbrio de \overline{BC}

$$R_d \frac{2}{3} L = 2 M_A \Rightarrow R_d = 3 \frac{M_A}{L}$$

Equilíbrio de forças verticais:

$$P = R_e + R_d = 6 \frac{M_A}{L} + 3 \frac{M_A}{L}$$

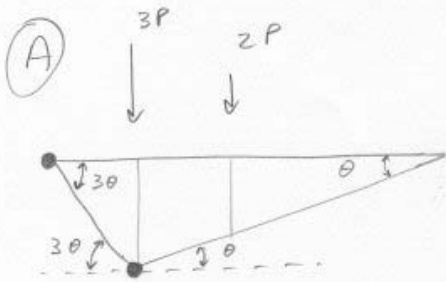
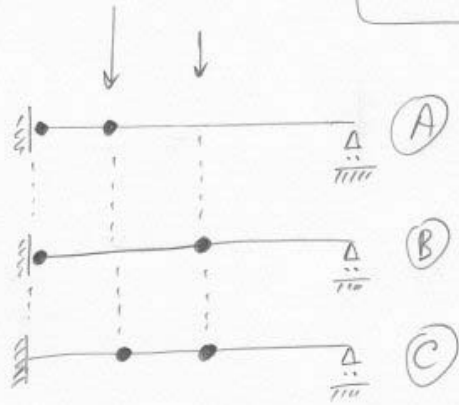
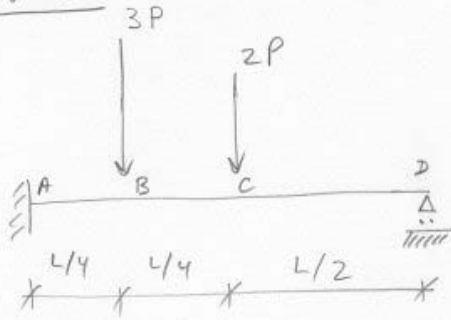
$$P = 9 \frac{M_A}{L}$$

Diagrama de momentos:



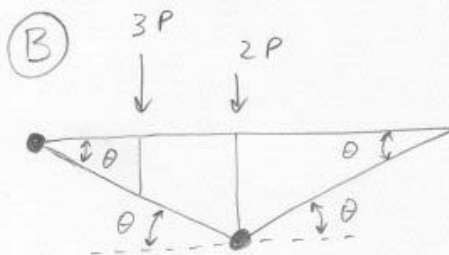
Exemplo 2

MBA - 12



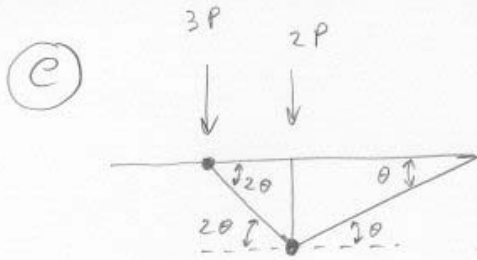
$$3P\left(3\theta \frac{L}{4}\right) + 2P\left(\theta \frac{L}{2}\right) = M_R (3\theta + 3\theta + \theta)$$

$$\frac{9}{4} PL + PL = 7 M_R \Rightarrow P = \frac{28}{13} \frac{M_R}{L} \Rightarrow P = 2.154 \frac{M_R}{L}$$



$$3P\left(\theta \frac{L}{4}\right) + 2P\left(\theta \frac{L}{2}\right) = M_R (\theta + \theta + \theta)$$

$$\frac{3}{4} PL + PL = 3 M_R \Rightarrow P = \frac{12}{7} \frac{M_R}{L} \Rightarrow P = 1.714 \frac{M_R}{L}$$



$$2P \left(2\theta \frac{L}{4} \right) = M_p (2\theta + 2\theta + \theta)$$

$$PL = 5M_p \Rightarrow P = 5 \frac{M_p}{L}$$

A menor carga corresponde à hipótese (B)

A maior carga que a estrutura suporta é:

$$P = 1.714 \frac{M_p}{L}$$

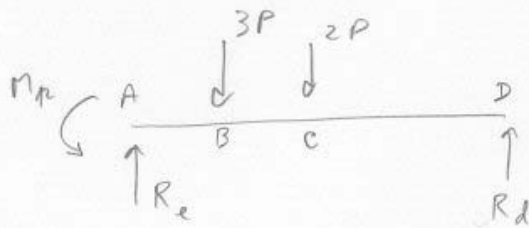
Nas rótulas plásticas o momento fletor é M_p , sendo admissível.

Nos pontos que não têm rótula plástica deve-se verificar se o momento fletor é admissível.

Em cada trecho entre cargas o diagrama de momentos é linear, bastando verificar o que se passa nas extremidades.

Hipótese (A)

Cálculo do momento em C



$$P = \frac{28}{13} \frac{M_A}{L}$$

$$(M_A) \quad M_A + R_d L = 3P \frac{L}{4} + 2P \frac{L}{2}$$

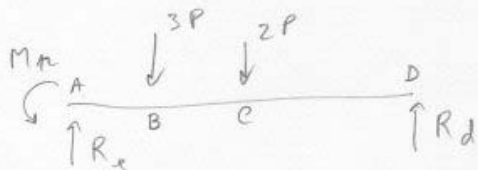
$$R_d L = \frac{7}{4} PL - M_A \Rightarrow R_d = \frac{7}{4} \frac{28}{13} \frac{M_A}{L} - \frac{M_A}{L} = \frac{36}{13} \frac{M_A}{L}$$

$$M_c = R_d \frac{L}{2} = \frac{36}{13} \frac{M_A}{L} \frac{L}{2} = \frac{18}{13} M_A = 1.385 M_A$$

$M_c > M_A \Rightarrow$ não admissível

Hipótese (B)

Cálculo do momento em B



$$P = \frac{12}{7} \frac{M_A}{L}$$

$$(M_D) \quad R_e L = M_A + 3P \frac{3}{4} L + 2P \frac{L}{2}$$

$$R_e = \frac{M_A}{L} + \frac{9}{4} P + P = \frac{M_A}{L} + \frac{13}{4} P = \frac{M_A}{L} + \frac{13}{4} \frac{12}{7} \frac{M_A}{L}$$

$$R_e = \frac{46}{7} \frac{M_A}{L}$$

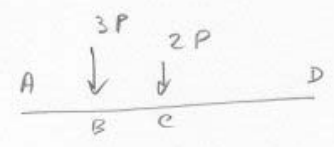
$$M_B = R_d \frac{L}{4} - M_p = \frac{46}{7} \frac{M_p}{L} \frac{L}{4} - M_p$$

$$M_B = \frac{9}{14} M_p = 0.643 M_p$$

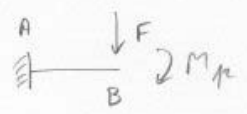
$M_B < M_p \Rightarrow$ admissível

Hipótese (c)
Cálculo do momento em A

$$P = 5 \frac{M_p}{L}$$



$$R_d \frac{L}{2} = M_p \Rightarrow R_d = \frac{2M_p}{L}$$



$$F = 3P + 2P - R_d = 5P - \frac{2M_p}{L}$$

$$F = 5\left(5 \frac{M_p}{L}\right) - 2 \frac{M_p}{L} = 23 \frac{M_p}{L}$$

$$M_A = -F \frac{L}{4} - M_p = -23 \frac{M_p}{L} \frac{L}{4} - M_p$$

$$M_A = -\frac{27}{4} M_p = -6.75 M_p$$

$|M_A| > M_p \Rightarrow$ não admissível

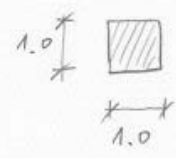
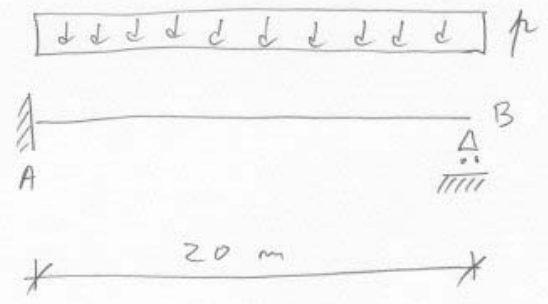
Conclusão: só a hipótese B é admissível

Ver files $\begin{cases} \text{Diag Mom A. gl. dat} \\ \text{Diag Mom B. gl. dat} \\ \text{Diag Mom C. gl. dat} \end{cases}$

- 1 - Suprimir um conjunto de ligações de modo a tornar a estrutura isostática (sistema base).
- 2 - Em cada ligação suprimida considerar uma incógnita hiperestática.
- 3 - Determinar o diagrama de momentos do sistema base, sob a acção da solicitação exterior.
- 4 - Determinar os diagramas de momentos correspondentes à actuação de cada uma das incógnitas hiperestáticas no sistema base.
- 5 - Determinar o diagrama real por adição dos diagramas indicados em 3 e 4, ajustando os valores das incógnitas hiperestáticas de forma a alcançar-se M_p num conjunto de pontos que conduzam à formação de um mecanismo.
- 6 - Desenhar o esquema do mecanismo referido em 5 e verificar se os momentos no diagrama resultante têm sinais compatíveis com as rotações do mecanismo.

Exemplo 3

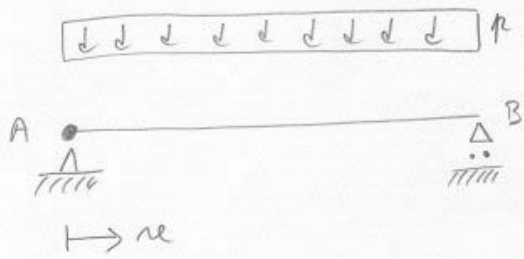
Aplicação do método estático



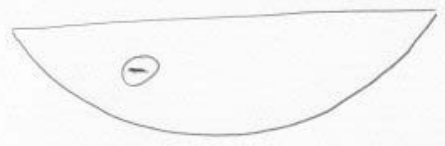
$\sigma_y = 400 \text{ MPa}$

$M_R = \sigma_y \frac{BH^2}{4} = 100 \text{ MNm}$

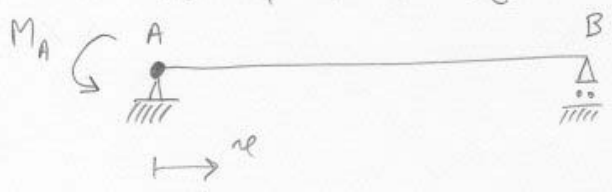
Sistema base:



$M(x) = -10 p x + p \frac{x^2}{2}$



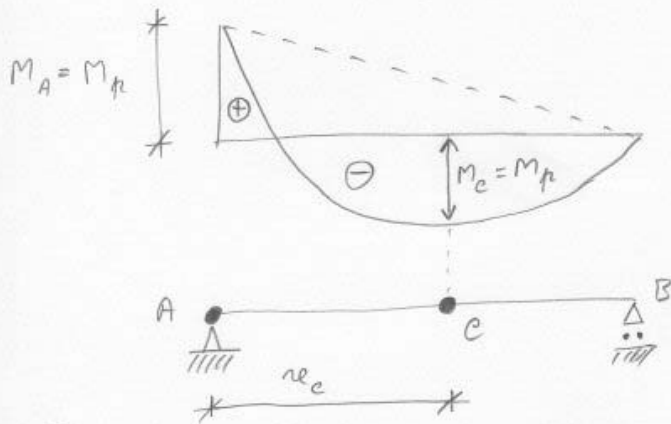
Atuação da incógnita hiperestática:



$M(x) = M_A - \frac{M_A}{20} x$



Da adição dos dois diagramas resulta:



Para se formar um mecanismo são necessárias duas rótulas

Considerando $M_A = M_p$ e adicionando as funções correspondentes aos dois diagramas, tem-se

$$M(x) = M_p - \frac{M_p}{20}x - 10kx + \frac{k}{2}x^2$$

Uma vez que $M_p = 100$, resulta

$$M(x) = 100 - 5x - 10kx + \frac{k}{2}x^2$$

Cálculo da abscissa correspondente ao momento mínimo:

$$\frac{dM}{dx} = 0 \Rightarrow -5 - 10k + kx = 0 \Rightarrow x = 10 + \frac{5}{k} = x_c$$

Avaliando a função $M(x)$ no ponto C ($x = x_c$), resulta:

$$M_e = 100 - 5\left(10 + \frac{5}{k}\right) - 10k\left(10 + \frac{5}{k}\right) + \frac{k}{2}\left(10 + \frac{5}{k}\right)^2$$

Igualando $M_e = -M_p = -100$, tem-se MBA-19

$$-100 = 100 - 5 \left(10 + \frac{\Sigma}{r} \right) - 10 r \left(10 + \frac{\Sigma}{r} \right) + \frac{r}{2} \left(10 + \frac{\Sigma}{r} \right)^2$$

Esta equação tem duas soluções

I) $r = 0.08578644 \Rightarrow x_e = 10 + \frac{\Sigma}{r} = 68.284297$

II) $r = 2.91421356 \Rightarrow x_e = 10 + \frac{\Sigma}{r} = 11.715729$

A solução I apresenta um valor de x_e fora da barra.

A solução II é a correcta.

