

## Modelo de análise linear de estruturas reticuladas

Joaquim A. O. Barros<sup>1</sup>  
A. Ventura Gouveia<sup>2</sup>  
Álvaro F. M. Azevedo<sup>3</sup>

<sup>1,2</sup> Dep.<sup>ta</sup> de Eng.<sup>a</sup> Civil da Universidade do Minho, Guimarães, Portugal

<sup>3</sup> Dep.<sup>ta</sup> de Eng.<sup>a</sup> Civil da Faculdade de Eng.<sup>a</sup> da Univ. Porto, Portugal

### RESUMO

No presente trabalho descreve-se resumidamente a formulação correspondente ao código computacional desenvolvido para análise linear de diversos tipos de estruturas reticuladas. Com este código é possível analisar estruturas articuladas bidimensionais e tridimensionais, estruturas reticuladas contínuas bidimensionais e tridimensionais e ainda grelhas. A aplicação deste código a exemplos e a descrição do módulo de pósprocessamento, desenvolvido com carácter pedagógico, efectuar-se-á num próximo artigo.

### 1 - INTRODUÇÃO

O código computacional desenvolvido neste trabalho baseia-se no método dos deslocamentos. Este código permite analisar, em regime linear-elástico, estruturas articuladas bidimensionais e tridimensionais, estruturas reticuladas contínuas bidimensionais e tridimensionais e grelhas. Qualquer uma destas estruturas pode ser constituída por barras com diferentes propriedades materiais. Considera-se que as barras têm secção constante ao longo do seu comprimento. Admite-se que em qualquer secção de determinada barra o seu centro de corte coincide com o seu baricentro (Mota Freitas). Os graus de liberdade de determinado ponto nodal da estrutura podem ser convertidos para um referencial especificado. Desta forma pode-se simular os casos de estruturas com apoios inclinados, isto é, com pontos nodais da estrutura em que os deslocamentos prescritos estão num referencial distinto do referencial local da barra e do referencial global da estrutura. Em qualquer ponto nodal da estrutura pode-se incluir uma "mola" com rigidez axial ou com rigidez à flexão, com qualquer direcção (desde que compatível com os graus de liberdade da estrutura). Desta forma consegue-se simular apoios elásticos com direcção arbitrária.

O programa de cálculo automático desenvolvido permite analisar estruturas sujeitas a diversos casos de carga. Em cada caso de carga é possível simular cargas aplicadas em pontos

---

<sup>1,3</sup> - Professor Auxiliar

<sup>2</sup> - Monitor

nodais da estrutura, peso próprio das barras, cargas uniformemente distribuídas nas barras, cargas linearmente distribuídas nas barras, cargas pontuais aplicadas no interior das barras, variações de temperatura e assentamentos de apoio. Pode-se ainda efectuar combinações de casos de carga.

## 2 - FORMULAÇÃO DO MODELO

O modelo de cálculo correspondente ao código computacional descreve-se nos seguintes passos:

### 1- Cálculo da matriz de rigidez da estrutura.

Para cada barra que discretiza a estrutura:

- 1.1 - Cálculo da matriz de rigidez no referencial local da barra,  $\underline{K}_b^l$ . Esta matriz relaciona os deslocamentos das extremidades da barra com as correspondentes forças, por intermédio do seguinte sistema de equações de equilíbrio:

$$\underline{Q}_b^l = \underline{K}_b^l \underline{U}_b^l \quad (2.1)$$

em que os índices  $l$  e  $b$ , significam que a grandeza especificada está no referencial local,  $l$ , da barra  $b$ .

- 1.2 - Cálculo da matriz de transformação,  $\underline{T}_b^{lg}$ , que transforma as grandezas (deslocamentos e forças) no referencial local da barra em grandezas no referencial global da estrutura,  $g$ .

- 1.3 - Cálculo da matriz de rigidez da barra no sistema global,  $\underline{K}_b^g$  ,:

$$\underline{K}_b^g = \underline{T}_b^{lg} \underline{K}_b^l \underline{T}_b^{lgT} \quad (2.2)$$

As matrizes de transformação utilizadas nos diferentes tipos de estruturas serão apresentadas na próxima secção, sendo na secção 4 deduzida a equação (2.2).

- 1.4 - Espalhamento da matriz de rigidez da barra,  $\underline{K}_b^g$ , na matriz de rigidez da estrutura,  $\underline{K}_E^g$ , em que o índice  $E$  significa estrutura.

### 2 - Cálculo da matriz $\underline{Q}_E^g$ que inclui os vectores das forças nodais equivalentes de todos os casos de carga, no referencial global:

Para cada caso de carga:

Para cada barra que discretiza a estrutura:

- 2.1 - Cálculo das forças nodais equivalentes às acções que actuam na barra,  $\underline{Q}_{eb,0}^l$ , no seu referencial.

- 2.2 - Transformação das forças nodais equivalentes do referencial local para o referencial global:

$$\underline{Q}_{eb,0}^g = \underline{T}_b^{lg} \underline{Q}_{eb,0}^l \quad (2.3)$$

2.3 - Espalhamento das forças nodais equivalentes da barra,  $\underline{Q}_{eb,0}^g$ , na matriz das forças nodais equivalentes da estrutura,  $\underline{Q}_E^g$ . As forças generalizadas aplicadas nos pontos nodais da estrutura são directamente espalhadas na matriz  $\underline{Q}_E^g$ .

### 3 - Introdução dos apoios elásticos:

A rigidez de elementos elásticos do tipo mola, ligados a pontos nodais da estrutura, é adicionada à matriz de rigidez da estrutura. Este assunto será tratado na secção 6.

### 4 - Simulação dos apoios inclinados:

Nos pontos nodais da estrutura em que os graus de liberdade são estabelecidos num referencial especificado, a matriz de rigidez da(s) barra(s) que se liga(m) a esse ponto nodal tem que atender ao facto desses graus de liberdade não estarem definidos nem no referencial da barra nem no referencial da estrutura. Este assunto será tratado na secção 7.

### 5 - Introdução das condições de ligação da estrutura ao exterior:

Os graus de liberdade com valor nulo ou com valor correspondente à ocorrência de assentamento de apoio são agrupados na matriz  $\underline{U}_{E,f}^g$ , em que o índice  $f$  significa que se trata de graus de liberdade fixos, isto é, com valor conhecido.

### 6 - Resolução do sistema de equações de equilíbrio da estrutura:

$$\underline{K}_E^g \underline{U}_E^g = \underline{Q}_E^g \quad (2.4)$$

em que  $\underline{U}_E^g$  inclui o vector dos deslocamentos dos pontos nodais da estrutura para cada caso de carga, no referencial global. Cada vector de  $\underline{U}_E^g$  inclui os deslocamentos dos graus de liberdade livres ( $\underline{U}_{E,l}^g$ ), isto é, a serem determinados, e os deslocamentos dos graus de liberdade fixos ( $\underline{U}_{E,f}^g$ ), cujo valor se conhece, dado que correspondem aos pontos nodais ligados ao exterior. Por sua vez,  $\underline{Q}_E^g$  inclui, para cada caso de carga, as forças nodais equivalentes aplicadas em graus de liberdade livres ( $\underline{Q}_{E,l}^g$ ) e fixos ( $\underline{Q}_{E,f}^g$ ) e ainda as reacções nos apoios da estrutura ao exterior ( $\underline{R}_E^g$ ). Da resolução do sistema de equações (2.4) obtêm-se, para cada caso de carga, os deslocamentos dos graus de liberdade livres e as reacções correspondentes aos graus de liberdade fixos. Na secção 9 é explicada a forma como se decompõe a relação (2.4) em componentes associadas a graus de liberdade livres e fixos e o procedimento de resolução do sistema de equações.

### 7 - Cálculo dos esforços das barras:

Para cada caso de carga

Para cada barra que discretiza a estrutura:

7.1 - Obtenção dos deslocamentos dos nós da barra,  $\underline{U}_b^g$ , a partir dos deslocamentos nos pontos da estrutura,  $\underline{U}_E^g$ .

7.2 - Cálculo dos deslocamentos da barra no referencial local:

$$\underline{U}_b^l = \underline{T}_b^{lgT} \underline{U}_b^g \quad (2.5)$$

7.3 - Cálculo dos esforços da barra no referencial local:

$$\underline{Q}_{eb}^l = -\underline{Q}_{eb,0}^l + \underline{K}_b^l \underline{U}_b^l \quad (2.6)$$

em que  $-\underline{Q}_{eb,0}^l$  é o vector das reacções de encastramento na barra, obtido multiplicando por -1 o vector das forças nodais equivalentes determinado no passo 2.1.

### 3 - MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO

Conforme se referiu na secção 2 é necessário relacionar deslocamentos e forças entre diferentes referenciais, mais precisamente entre o referencial local da barra e o referencial global em que a estrutura é geometricamente definida. Esta relação é estabelecida por intermédio de matrizes de transformação, cuja constituição depende do tipo de estrutura que se pretende analisar. A matriz de transformação converte os deslocamentos (ou forças) da extremidade esquerda,  $i$ , e da extremidade direita,  $j$ , da barra  $b$ , do referencial local,  $l$  da barra para o referencial global,  $g$  isto é:

$$\underline{U}_b^g = \underline{T}_b^{lg} \underline{U}_b^l \quad (3.1)$$

no caso dos deslocamentos e,

$$\underline{Q}_b^g = \underline{T}_b^{lg} \underline{Q}_b^l \quad (3.2)$$

no caso das forças, em que:

$$\underline{T}_b^{lg} = \begin{bmatrix} \underline{T}_{b,i}^{lg} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{T}_{b,j}^{lg} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Dado que  $\underline{T}_{b,i}^{lg} = \underline{T}_{b,j}^{lg}$ , apenas se vai deduzir a submatriz  $\underline{T}_{b,i}^{lg}$ , que se designará por  $\underline{\bar{T}}_b^{lg}$ . A matriz de transformação da barra de estrutura articulada bidimensional, estrutura porticada bidimensional, de grelha e de estrutura articulada tridimensional pode ser obtida por intermédio de um processo de simplificação da matriz de transformação de barra de pórtico tridimensional. Por este facto, apenas se procede à dedução da matriz de transformação de barra de pórtico tridimensional.

#### 3.4 - Barra de estrutura reticulada contínua tridimensional

Começa-se por relacionar as componentes do vector  $\underline{V}$ , representado na figura 3.1, nos referenciais,  $g$  e  $l$ .

$$\underline{V} = V_{g_1} \hat{i}_{g_1} + V_{g_2} \hat{i}_{g_2} + V_{g_3} \hat{i}_{g_3} \quad (3.4a)$$

$$\underline{V} = V_{l_1} \hat{i}_{l_1} + V_{l_2} \hat{i}_{l_2} + V_{l_3} \hat{i}_{l_3} \quad (3.4b)$$

em que  $\hat{i}_i$  e  $\hat{i}_{g_i}$  ( $i=1,\dots,3$ ) são os versores do referencial  $l$  e  $g$ , respectivamente.

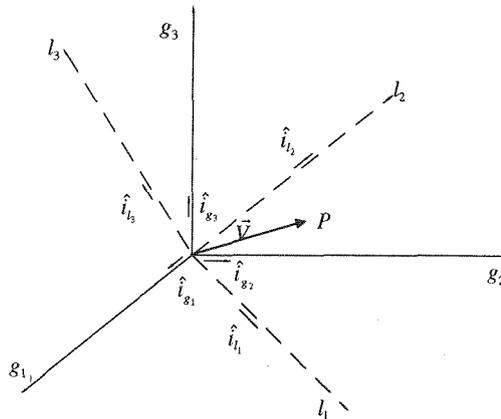


Figura 3.1 - Projecção de um vector  $\underline{V}$  no referencial local da barra e no referencial global da estrutura.

As componentes do vector  $\underline{V}$  no referencial  $g$  podem ser obtidas efectuando o produto escalar do vector  $\underline{V}$  pelos versores do referencial  $g$ , isto é:

$$V_{g1} = \underline{V} \cdot \hat{i}_{g1} = (V_{l1} \cdot \hat{i}_{l1} + V_{l2} \cdot \hat{i}_{l2} + V_{l3} \cdot \hat{i}_{l3}) \cdot \hat{i}_{g1} \quad (3.5a)$$

$$V_{g2} = \underline{V} \cdot \hat{i}_{g2} = (V_{l1} \cdot \hat{i}_{l1} + V_{l2} \cdot \hat{i}_{l2} + V_{l3} \cdot \hat{i}_{l3}) \cdot \hat{i}_{g2} \quad (3.5b)$$

$$V_{g3} = \underline{V} \cdot \hat{i}_{g3} = (V_{l1} \cdot \hat{i}_{l1} + V_{l2} \cdot \hat{i}_{l2} + V_{l3} \cdot \hat{i}_{l3}) \cdot \hat{i}_{g3} \quad (3.5c)$$

ou

$$\begin{Bmatrix} V_{g1} \\ V_{g2} \\ V_{g3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{i}_{l1} \cdot \hat{i}_{g1} & \hat{i}_{l2} \cdot \hat{i}_{g1} & \hat{i}_{l3} \cdot \hat{i}_{g1} \\ \hat{i}_{l1} \cdot \hat{i}_{g2} & \hat{i}_{l2} \cdot \hat{i}_{g2} & \hat{i}_{l3} \cdot \hat{i}_{g2} \\ \hat{i}_{l1} \cdot \hat{i}_{g3} & \hat{i}_{l2} \cdot \hat{i}_{g3} & \hat{i}_{l3} \cdot \hat{i}_{g3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_{l1} \\ V_{l2} \\ V_{l3} \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

ou ainda,

$$\underline{V}^g = \underline{T}^{lg} \underline{V}^l \quad (3.7)$$

em que  $\hat{i}_i \cdot \hat{i}_{g_j}$  é o cosseno do ângulo realizado pelo versor  $\hat{i}_i$  e  $\hat{i}_{g_j}$ . Assim, a 1ª coluna da matriz  $\underline{T}^{lg}$  é constituída pelos cossenos dos ângulos entre os versores  $\hat{i}_i$  e  $\hat{i}_{g_j}$  ( $i,j=1,\dots,3$ ). Nestas circunstâncias esta coluna contém as componentes do versor  $\hat{i}_{l1}$  no referencial  $g$ . De forma análoga se deduz o significado das restantes colunas da matriz  $\underline{T}^{lg}$ . Admite-se agora que o referencial  $g$  é o sistema global de eixos relativamente ao qual a estrutura é geometricamente definida e o referencial  $l$  é o sistema local de eixos principais centrais de inércia, duma barra da referida estrutura. Considera-se ainda que o vector  $\underline{V}$  é um vector com origem na extremidade esquerda de uma barra e que se encontra dirigido para a extremidade direita da mesma barra, de comprimento  $L$  como mostra a figura 3.2.

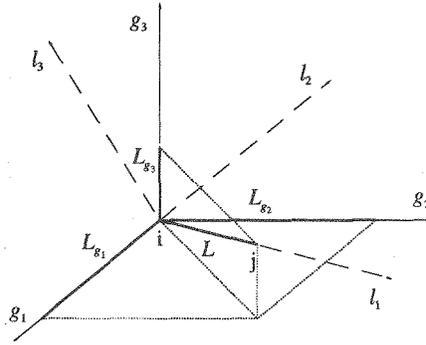


Figura 3.2 - Referencial local  $l$  da barra e referencial global  $g$  da estrutura

Os vetores  $\hat{i}_{g_i}$  têm as seguintes componentes no referencial  $g$ :

$$\hat{i}_{g_1} = \{1,0,0\}^T; \hat{i}_{g_2} = \{0,1,0\}^T; \hat{i}_{g_3} = \{0,0,1\}^T \quad (3.8)$$

e a barra tem componentes  $L_{g_1}$ ,  $L_{g_2}$  e  $L_{g_3}$  no referencial  $g$ . Assim, o comprimento desta barra é:

$$L = \sqrt{L_{g_1}^2 + L_{g_2}^2 + L_{g_3}^2}. \quad (3.9)$$

Como a primeira coluna da matriz  $T^{lg}$  é constituída pelas componentes de  $\hat{i}_{l_1}$  no referencial  $g$ , tem-se:

$$T_{11}^{lg} = \frac{L_{g_1}}{L} = \hat{i}_{l_1} \cdot \hat{i}_{g_1}; T_{21}^{lg} = \frac{L_{g_2}}{L} = \hat{i}_{l_1} \cdot \hat{i}_{g_2}; T_{31}^{lg} = \frac{L_{g_3}}{L} = \hat{i}_{l_1} \cdot \hat{i}_{g_3}. \quad (3.10)$$

Para determinar as componentes da segunda coluna da matriz  $T^{lg}$ , isto é, as componentes de  $\hat{i}_{l_2}$  no referencial  $g$ , considera-se que o eixo  $l_2$  é ortogonal ao plano definido por  $g_3$  e  $l_1$ , pelo que:

$$\hat{i}_{l_2} = \frac{\hat{i}_{g_3} \wedge \hat{i}_{l_1}}{\|\hat{i}_{g_3} \wedge \hat{i}_{l_1}\|} = \frac{1}{\|\hat{i}_{g_3} \wedge \hat{i}_{l_1}\|} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ L_{g_1} & L_{g_2} & L_{g_3} \end{vmatrix} = \frac{1}{\|\hat{i}_{g_3} \wedge \hat{i}_{l_1}\|} \left\{ -\frac{L_{g_2}}{L}, \frac{L_{g_1}}{L}, 0 \right\}^T \quad (3.11)$$

em que  $\|\hat{i}_{g_3} \wedge \hat{i}_{l_1}\|$  é a norma do vector resultante do produto vectorial de  $\hat{i}_{g_3}$  com  $\hat{i}_{l_1}$ . Como

$$\|\hat{i}_{g_3} \wedge \hat{i}_{l_1}\| = \sqrt{\frac{L_{g_1}^2 + L_{g_2}^2}{L^2}} \quad (3.12)$$

que substituído em (3.11) conduz a:

$$\hat{i}_{l_2} = \left\{ -\frac{L_{g_2}}{L_p}, \frac{L_{g_1}}{L_p}, 0 \right\}^T \quad (3.13)$$

em que,

$$L_p = \sqrt{L_{g_1}^2 + L_{g_2}^2} \quad (3.14)$$

o que significa que:

$$T_{12}^{lg} = -\frac{L_{g_2}}{L_p}; T_{22}^{lg} = \frac{L_{g_1}}{L_p}; T_{32}^{lg} = 0. \quad (3.15)$$

Finalmente o versor de  $l_3, \hat{i}_{l_3}$ , obtém-se por intermédio do produto vectorial de  $\hat{i}_{l_1}$  com  $\hat{i}_{l_2}$ , isto é:

$$\hat{i}_{l_3} = \hat{i}_{l_1} \wedge \hat{i}_{l_2} = \begin{vmatrix} \frac{L_{g_1}}{L} & \frac{L_{g_2}}{L} & \frac{L_{g_3}}{L} \\ \frac{L_{g_2}}{L_p} & \frac{L_{g_1}}{L_p} & 0 \\ -\frac{L_{g_1}}{L_p} & \frac{L_{g_2}}{L_p} & 0 \end{vmatrix} = \left\{ -\frac{L_{g_1} L_{g_3}}{LL_p}, -\frac{L_{g_2} L_{g_3}}{LL_p}, \frac{L_{g_1}^2 + L_{g_2}^2}{LL_p} \right\}^T \quad (3.16)$$

pelo que,

$$T_{13}^{lg} = -\frac{L_{g_1} L_{g_3}}{LL_p}; T_{23}^{lg} = -\frac{L_{g_2} L_{g_3}}{LL_p}; T_{33}^{lg} = \frac{L_{g_1}^2 + L_{g_2}^2}{LL_p} = \frac{L_p}{L}. \quad (3.17)$$

Assim, a matriz de transformação de grandezas (deslocamentos e forças) referidas ao sistema local,  $l$ , principal central de inércia da barra para o referencial global,  $g$ , é a seguinte:

$$\underline{T}^{lg} = \begin{bmatrix} \frac{L_{g_1}}{L} & -\frac{L_{g_2}}{L_p} & -\frac{L_{g_1} L_{g_3}}{LL_p} \\ \frac{L_{g_2}}{L} & \frac{L_{g_1}}{L_p} & -\frac{L_{g_2} L_{g_3}}{LL_p} \\ \frac{L_{g_3}}{L} & 0 & \frac{L_p}{L} \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Admite-se agora que os eixos  $l_2$  e  $l_3$ , não são principais centrais de inércia, como é o caso do perfil representado na figura 3.3, cujos eixos principais centrais de inércia são os eixos  $l'_2$  e  $l'_3$ , formando um ângulo  $\alpha$  com os eixos  $l_2$  e  $l_3$ . Neste caso é necessário converter os versores  $\hat{i}_{l_2}$  e  $\hat{i}_{l_3}$ , para os eixos  $l'_2$  e  $l'_3$ , isto é:

$$\hat{i}_{l'_2} = \hat{i}_{l_2} \cos \alpha + \hat{i}_{l_3} \sin \alpha \quad (3.19a)$$

$$\hat{i}_{l'_3} = -\hat{i}_{l_2} \sin \alpha + \hat{i}_{l_3} \cos \alpha. \quad (3.19b)$$

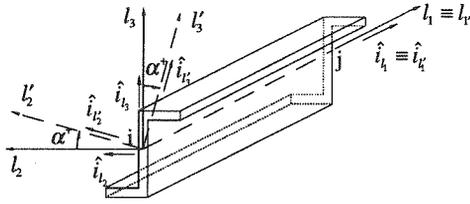


Figura 3.3 - Perfil em Z com a alma num plano vertical

Tendo em conta as coordenadas de  $\hat{i}_{i_2}$  e  $\hat{i}_{i_3}$ , estabelecidas em (3.13) e (3.16), respectivamente, as equações (3.19) reduzem-se às seguintes:

$$\hat{i}_{i_2} = \left\{ -\frac{L_{g_2}}{L_p} \cos \alpha - \frac{L_{g_1} L_{g_3}}{LL_p} \operatorname{sen} \alpha, \frac{L_{g_1}}{L_p} \cos \alpha - \frac{L_{g_2} L_{g_3}}{LL_p} \operatorname{sen} \alpha, \frac{L_p}{L} \operatorname{sen} \alpha \right\}^T \quad (3.20a)$$

$$\hat{i}_{i_3} = \left\{ \frac{L_{g_2}}{L_p} \operatorname{sen} \alpha - \frac{L_{g_1} L_{g_3}}{LL_p} \cos \alpha, -\frac{L_{g_1}}{L_p} \operatorname{sen} \alpha - \frac{L_{g_2} L_{g_3}}{LL_p} \cos \alpha, \frac{L_p}{L} \cos \alpha \right\}^T \quad (3.20b)$$

peço que a matriz de transformação  $\underline{T}^{i'g}$  é a seguinte:

$$\underline{T}^{i'g} = \begin{bmatrix} \frac{L_{g_1}}{L} & -\frac{L_{g_2}}{L_p} \cos \alpha - \frac{L_{g_1} L_{g_3}}{LL_p} \operatorname{sen} \alpha & \frac{L_{g_2}}{L_p} \operatorname{sen} \alpha - \frac{L_{g_1} L_{g_3}}{LL_p} \cos \alpha \\ \frac{L_{g_2}}{L} & \frac{L_{g_1}}{L_p} \cos \alpha - \frac{L_{g_2} L_{g_3}}{LL_p} \operatorname{sen} \alpha & -\frac{L_{g_1}}{L_p} \operatorname{sen} \alpha - \frac{L_{g_2} L_{g_3}}{LL_p} \cos \alpha \\ \frac{L_{g_3}}{L} & \frac{L_p}{L} \operatorname{sen} \alpha & \frac{L_p}{L} \cos \alpha \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Se a barra estiver dirigida segundo o sentido positivo do eixo  $g_3$  ( $L_{g_1} = L_{g_2} = 0$ ), tal como se representa na figura 3.4, teremos para componentes dos versores  $\hat{i}_{i_1}$  os seguintes valores:

$$\hat{i}_{i_1} = \left\{ 0, 0, \frac{L_{g_3}}{L_p} \right\}^T; \hat{i}_{i_2} = \{0, 1, 0\}^T; \hat{i}_{i_3} = \left\{ -\frac{L_{g_3}}{L_p}, 0, 0 \right\}^T. \quad (3.22)$$

Substituindo (3.22) em (3.19) obtém-se,

$$\hat{i}_{i_2} = \left\{ -\frac{L_{g_3}}{L_p} \operatorname{sen} \alpha, \cos \alpha, 0 \right\}^T; \hat{i}_{i_3} = \left\{ -\frac{L_{g_3}}{L_p} \cos \alpha, -\operatorname{sen} \alpha, 0 \right\}^T \quad (3.23)$$

peço que:

$$\underline{T}'g = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{L_{g_3}}{L} \operatorname{sen}\alpha & -\frac{L_{g_3}}{L} \operatorname{cos}\alpha \\ 0 & \operatorname{cos}\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \frac{L_{g_3}}{L} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\operatorname{sen}\alpha & -\operatorname{cos}\alpha \\ 0 & \operatorname{cos}\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

dados que  $L_{g_3} = L$ .

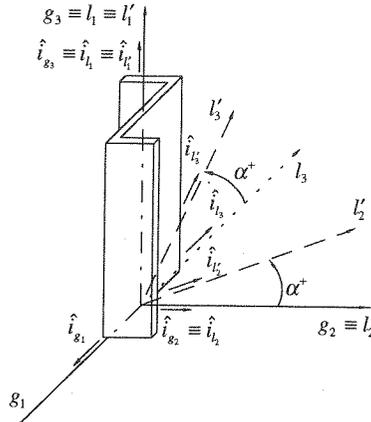


Figura 3.4 - Perfil em Z dirigido segundo o sentido positivo do eixo  $g_3$ .

Se a barra estiver dirigida segundo o sentido negativo do eixo  $g_3$ , tal como se representa na figura 3.5, e desenvolvendo procedimento análogo ao acabado de expor, obtém-se:

$$\underline{T}'g = \begin{bmatrix} 0 & \frac{L_{g_3}}{L} \operatorname{sen}\alpha & \frac{L_{g_3}}{L} \operatorname{cos}\alpha \\ 0 & \operatorname{cos}\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ -\frac{L_{g_3}}{L} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \operatorname{sen}\alpha & \operatorname{cos}\alpha \\ 0 & \operatorname{cos}\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

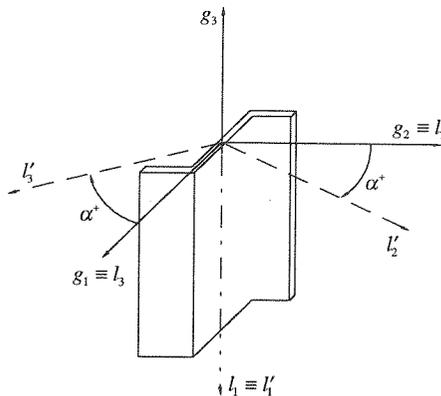


Figura 3.5 - Perfil em Z dirigido segundo o sentido negativo do eixo  $g_3$ .

Se a barra estiver dirigida segundo o eixo  $g_3$ , e os eixos locais da barra forem principais centrais de inércia (Figura 3.6), a matriz  $\underline{T}^{lg} = \underline{T}^{lg}$  obtém-se de (3.24) e (3.25) considerando-se  $\alpha = 0$ , pelo que,

$$\underline{T}^{lg} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{L_{g_3}}{L} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{L_{g_3}}{L} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

se a barra estiver dirigida segundo o sentido positivo do eixo  $g_3$  (Figura 3.6a), e,

$$\underline{T}^{lg} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{L_{g_3}}{L} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{L_{g_3}}{L} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

se a barra estiver dirigida segundo o sentido negativo do eixo  $g_3$  (Figura 3.6b).

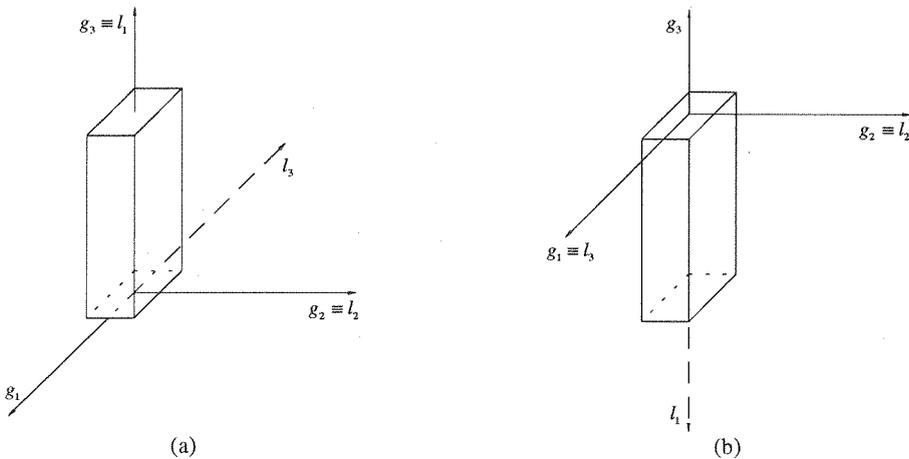


Figura 3.6 - Barra dirigida segundo o sentido positivo (a) e negativo (b) do eixo  $g_3$

Como em cada nó de uma barra de uma estrutura contínua espacial existem 6 graus de liberdade, três deslocamentos,  $\delta_i$ , mais três rotações,  $\theta_i$ , (ver figura 3.7), os deslocamentos generalizados (deslocamentos e rotações) da extremidade esquerda, no referencial local da barra,  $\underline{U}_i^l$ , relacionam-se com os deslocamentos generalizados no referencial global,  $\underline{U}_i^g$ , por intermédio da seguinte expressão:

$$\begin{Bmatrix} \delta_i^g \\ \theta_i^g \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{T}^{lg} & 0 \\ 0 & \underline{T}^{lg} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i^l \\ \theta_i^l \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

ou,

$$\underline{U}_{b,i}^g = \underline{\bar{T}}_{b,i}^{lg} \underline{U}_{b,i}^l \quad (3.29)$$

em que  $\underline{U}_{b,i}^g$  engloba os deslocamentos,  $\delta_i$ , e as rotações,  $\theta_i$ , da extremidade esquerda da barra.

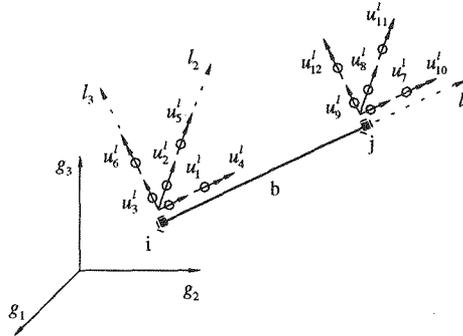


Figura 3.7 - Graus de liberdade da barra de estrutura reticulada contínua tridimensional, no referencial local da barra.

### 3.2 - Barra de estrutura articulada bidimensional, pórtico plano, grelha e estrutura articulada tridimensional

No Quadro 3.1 apresenta-se a matriz de transformação,  $\underline{T}_b^{lg}$ , de barra de estrutura articulada bidimensional, de pórtico plano, de grelha e de estrutura articulada tridimensional.

## 4 - MATRIZ DE RIGIDEZ NO REFERENCIAL LOCAL

Na figura 4.1 está representada uma barra  $b$  com um nó  $i$  na sua extremidade esquerda e um nó  $j$  na sua extremidade direita. Considere-se, por exemplo, que se trata de uma barra de um pórtico bidimensional contínuo.

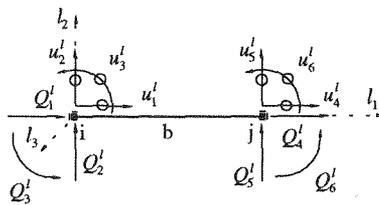


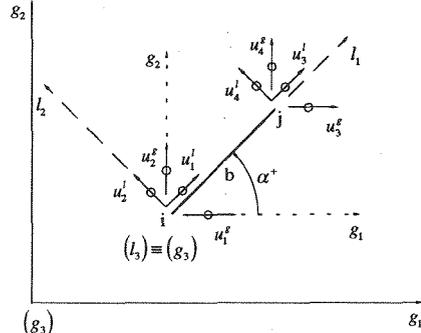
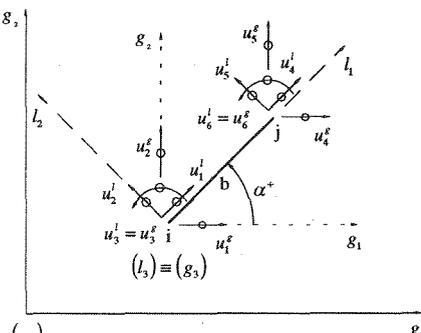
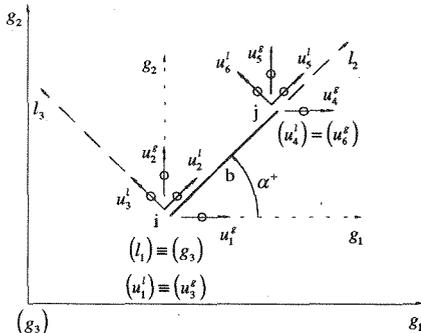
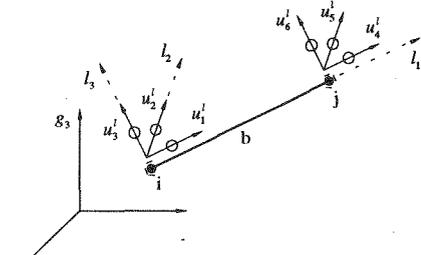
Figura 4.1 - Deslocamentos e forças nodais equivalentes numa barra de pórtico plano.

Aplicando o equilíbrio de forças segundo a direcção dos graus de liberdade  $u_i^l$  c/  $i = 1, \dots, 6$  obtém-se:

$$\underline{Q}_b^l = \underline{K}_b^l \underline{U}_b^l \quad (4.1)$$

em que  $\underline{Q}_b^l$  é o vector das forças nodais equivalentes no referencial local da barra,  $\underline{K}_b^l$  é a matriz de rigidez da barra no seu referencial e  $\underline{U}_b^l$  é o vector dos deslocamentos dos nós da barra no referencial desta.

Quadro 3.1 - Matriz de transformação,  $\bar{T}_b^{lg}$ , de barra de estrutura articulada bidimensional, de pórtico plano, de grelha e de estrutura articulada tridimensional.

<p style="text-align: center;">Estrutura articulada bidimensional</p>  <p style="text-align: center;">(l<sub>3</sub>) ≡ (g<sub>3</sub>)</p>	$\bar{T}_b^{lg} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (3.30)$
<p style="text-align: center;">Estrutura reticulada contínua bidimensional</p>  <p style="text-align: center;">(l<sub>3</sub>) ≡ (g<sub>3</sub>)</p>	$\bar{T}_b^{lg} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha & 0 \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.31)$
<p style="text-align: center;">Grelha</p>  <p style="text-align: center;">(l<sub>3</sub>) ≡ (g<sub>3</sub>) (u<sub>1</sub>) ≡ (u<sub>3</sub>)</p>	$\bar{T}_b^{lg} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ 0 & \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (3.32)$
<p style="text-align: center;">Estrutura articulada tridimensional</p> 	<p style="text-align: center;">Igual a (3.18)</p>

A relação (4.1) pode ser rescrita da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \underline{Q}_i^l \\ \underline{Q}_j^l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{ii}^l & \underline{K}_{ij}^l \\ \underline{K}_{ji}^l & \underline{K}_{jj}^l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{U}_i^l \\ \underline{U}_j^l \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

em que o índice  $i$  e  $j$  referem grandezas associadas ao nó  $i$  e ao nó  $j$  da barra. Assim,  $\underline{K}_{ii}^l$  representa as forças generalizadas que se aplicam segundo os graus de liberdade do nó  $i$ , devidos à imposição de deslocamentos generalizados unitários segundo os graus de liberdade do nó  $i$ , mantendo-se fixos os restantes graus de liberdade. Por sua vez  $\underline{K}_{ij}^l$  representa as forças generalizadas que se aplicam segundo os graus de liberdade do nó  $i$ , devidos à imposição de deslocamentos generalizados unitários segundo os graus de liberdade do nó  $j$ , mantendo-se fixos os restantes graus de liberdade. Do teorema da reciprocidade das forças resulta que  $\underline{K}_{ji}^l = \underline{K}_{ij}^{lT}$  (Weaver 1990), pelo que a matriz  $\underline{K}_b^l$  é simétrica.

Nas secções seguintes apresenta-se a matriz  $\underline{K}_b^l$  para os diferentes tipos de problemas considerados no presente trabalho. A sua dedução pode ser encontrada na referência (Barros 1996).

#### 4.1 - Barra de estrutura articulada bidimensional

Na Figura 4.2 encontra-se representada uma barra numa estrutura articulada bidimensional. Para se ter em conta o efeito do peso próprio da barra considera-se dois graus de liberdade por nó. Assim, as submatrizes de  $\underline{K}_b^l$  são as seguintes:

$$\underline{K}_{ii}^l = \underline{K}_{jj}^l = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{K}_{ji}^l = \underline{K}_{ij}^{lT} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

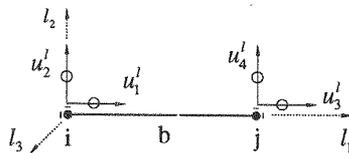


Figura 4.2 - Barra de estrutura articulada bidimensional.

#### 4.2 - Barra de estrutura reticulada contínua bidimensional

Na Figura 4.3 encontra-se representada uma barra dum pórtico. As submatrizes de  $\underline{K}_b^l$  são as seguintes:

$$\underline{K}_{ii}^l = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_{l_3}}{L^3} & \frac{6EI_{l_3}}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_{l_3}}{L^2} & \frac{4EI_{l_3}}{L} \end{bmatrix}, \quad \underline{K}_{ij}^l = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_{l_3}}{L^3} & -\frac{6EI_{l_3}}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI_{l_3}}{L^2} & \frac{4EI_{l_3}}{L} \end{bmatrix}, \quad (4.4a)$$

$$\underline{K}_{ji}^l = \underline{K}_{ij}^{lT} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_{l_3}}{L^3} & -\frac{6EI_{l_3}}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_{l_3}}{L^2} & \frac{2EI_{l_3}}{L} \end{bmatrix} \quad (4.4b)$$

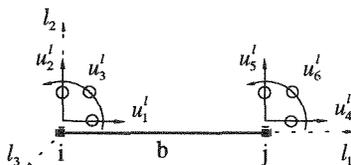


Figura 4.3 - Barra de estrutura reticulada contínua bidimensional.

### 4.3 - Barra de grelha

Na Figura 4.4 encontra-se representada uma barra duma grelha. As submatrizes de  $\underline{K}_b^l$  são as seguintes:

$$\underline{K}_{ii}^l = \begin{bmatrix} \frac{12EI_{l_3}}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_{l_3}}{L^2} \\ 0 & \frac{GI_{l_2}}{L} & 0 \\ -\frac{6EI_{l_3}}{L^2} & 0 & \frac{4EI_{l_3}}{L} \end{bmatrix}, \quad \underline{K}_{jj}^l = \begin{bmatrix} \frac{12EI_{l_3}}{L^3} & 0 & \frac{6EI_{l_3}}{L^2} \\ 0 & \frac{GI_{l_2}}{L} & 0 \\ \frac{6EI_{l_3}}{L^2} & 0 & \frac{4EI_{l_3}}{L} \end{bmatrix}, \quad (4.5a)$$

$$\underline{K}_{ji}^l = \underline{K}_{ij}^{lT} = \begin{bmatrix} -\frac{12EI_{l_3}}{L^3} & 0 & \frac{6EI_{l_3}}{L^2} \\ 0 & -\frac{GI_{l_2}}{L} & 0 \\ \frac{6EI_{l_3}}{L^2} & 0 & \frac{2EI_{l_3}}{L} \end{bmatrix} \quad (4.5b)$$

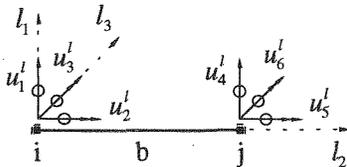


Figura 4.4 - Barra de uma grelha.

### 4.4 - Barra de estrutura articulada tridimensional

Na Figura 4.5 encontra-se representada uma barra duma estrutura articulada tridimensional. Para se ter em conta o efeito do peso próprio desta barra considera-se três graus de liberdade por nó. Assim, as submatrizes de  $\underline{K}_b^l$  são as seguintes:

$$\underline{K}_{ii}^l = \underline{K}_{jj}^l = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{K}_{ji}^l = \underline{K}_{ij}^{lT} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

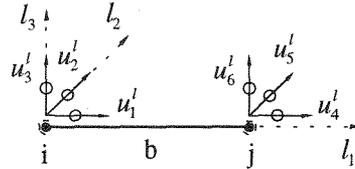


Figura 4.5 - Barra de uma estrutura articulada tridimensional.

#### 4.5 - Barra de estrutura reticulada contínua tridimensional

Na Figura 4.6 encontra-se representada uma barra duma estrutura reticulada contínua tridimensional. As submatrizes de  $\underline{K}_b^l$  são as seguintes:

$$\underline{K}_{ii}^l = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_b}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_b}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_b}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_b}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_b}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_b}{L^2} & 0 & \frac{4EI_b}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_b}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_b}{L} \end{bmatrix}, \quad \underline{K}_{ji}^l = \underline{K}_{ij}^{lT} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_b}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_b}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_b}{L^3} & 0 & \frac{6EI_b}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_b}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_b}{L^2} & 0 & \frac{2EI_b}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_b}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_b}{L} \end{bmatrix}, \quad (4.7a)$$

$$\underline{K}_{jj}^l = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_b}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_b}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_b}{L^3} & 0 & \frac{6EI_b}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_b}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_b}{L^2} & 0 & \frac{4EI_b}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_b}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_b}{L} \end{bmatrix} \quad (4.7b)$$

## 5 - MATRIZ DE RIGIDEZ NO REFERENCIAL GLOBAL

### 5.1 - Matriz de rigidez da barra no referencial global

As grandezas referidas equação (2.1) encontram-se no referencial local da barra,  $l$ . Uma vez que se pretende obter os deslocamentos dos pontos nodais da estrutura no referencial global, as forças nodais equivalentes,  $\underline{Q}_b^l$ , e os deslocamentos dos nós da barra,  $\underline{U}_b^l$ , são convertidos para o referencial global, por intermédio das seguintes relações:

$$\underline{U}_b^g = \underline{T}_b^{lg} \underline{U}_b^l \quad (5.1)$$

$$\underline{Q}_b^g = \underline{T}_b^{lg} \underline{Q}_b^l \quad (5.2)$$

em que  $\underline{T}_b^{lg}$  é a matriz de transformação da barra, referida na secção 3. Multiplicando ambos os termos de (2.1) por  $\underline{T}_b^{lg}$  obtém-se:

$$\underline{T}_b^{lg} \underline{Q}_b^l = \underline{T}_b^{lg} \underline{K}_b^l \underline{U}_b^l \quad (5.3)$$

Fazendo intervir em (5.3) as relações (5.1) e (5.2) e tendo em conta que  $\underline{T}_b^{lg^{-1}} = \underline{T}_b^{lgT}$ , obtém-se:

$$\underline{Q}_b^g = \underline{T}_b^{lg} \underline{K}_b^l \underline{T}_b^{lgT} \underline{U}_b^g \quad (5.4)$$

ou

$$\underline{Q}_b^g = \underline{K}_b^g \underline{U}_b^g \quad (5.5)$$

pelo que

$$\underline{K}_b^g = \underline{T}_b^{lg} \underline{K}_b^l \underline{T}_b^{lgT} \quad (5.6)$$

em que  $\underline{K}_b^g$  representa a matriz de rigidez da barra no referencial global  $g$ .

## 5.2 - Matriz de rigidez da estrutura

A matriz de rigidez da estrutura,  $\underline{K}_E^g$ , no referencial global de eixos  $g$ , é obtida espalhando nesta matriz as matrizes de rigidez,  $\underline{K}_b^g$ , das barras da estrutura. Considere-se, por exemplo, o pórtico plano representado na figura 5.1. Este pórtico é constituído por duas barras. A barra 1 tem o nó 1 e o nó 2 na extremidade esquerda e direita, respectivamente, e a barra 2 tem o nó 2 e o nó 3 na extremidade esquerda e direita, respectivamente.

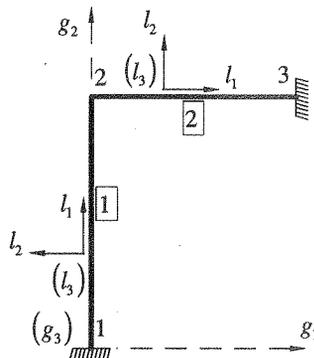


Figura 5.1 - Pórtico plano.

A matriz de rigidez da barra 1 no sistema global é a seguinte:

$$\underline{K}_1^g = \begin{bmatrix} \underline{T}_{1,1}^{lg} \underline{K}_{1,11}^l \underline{T}_{1,1}^{lgT} & \underline{T}_{1,1}^{lg} \underline{K}_{1,12}^l \underline{T}_{1,2}^{lgT} \\ \underline{T}_{1,2}^{lg} \underline{K}_{1,21}^l \underline{T}_{1,1}^{lgT} & \underline{T}_{1,2}^{lg} \underline{K}_{1,22}^l \underline{T}_{1,2}^{lgT} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

em que  $\underline{T}_{1,i}^{lg}$  é a submatriz de  $\underline{T}_1^{lg}$  relativa à extremidade esquerda (nó  $i$ ) da barra 1 (ver equação (3.31)), e  $\underline{K}_{1,ij}^l$  é a submatriz associada às extremidades  $i$  (esquerda) e  $j$  (direita) da barra 1. Na secção 3 verificamos que  $\underline{T}_{b,i}^{lg} = \underline{T}_{b,j}^{lg} = \underline{\bar{T}}_b^{lg}$  pelo que:

$$\underline{K}_1^g = \begin{bmatrix} \underline{\bar{T}}_1^{lg} \underline{K}_{1,11}^l \underline{\bar{T}}_1^{lgT} & \underline{\bar{T}}_1^{lg} \underline{K}_{1,12}^l \underline{\bar{T}}_1^{lgT} \\ \underline{\bar{T}}_1^{lg} \underline{K}_{1,21}^l \underline{\bar{T}}_1^{lgT} & \underline{\bar{T}}_1^{lg} \underline{K}_{1,22}^l \underline{\bar{T}}_1^{lgT} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

De forma análoga, para a barra 2 teremos:

$$\underline{K}_2^g = \begin{bmatrix} \underline{\bar{T}}_2^{lg} \underline{K}_{2,11}^l \underline{\bar{T}}_2^{lgT} & \underline{\bar{T}}_2^{lg} \underline{K}_{2,12}^l \underline{\bar{T}}_2^{lgT} \\ \underline{\bar{T}}_2^{lg} \underline{K}_{2,21}^l \underline{\bar{T}}_2^{lgT} & \underline{\bar{T}}_2^{lg} \underline{K}_{2,22}^l \underline{\bar{T}}_2^{lgT} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

O espalhamento de  $\underline{K}_1^g$  e  $\underline{K}_2^g$  na matriz de rigidez da estrutura,  $\underline{K}_E^g$  está esquematicamente descrito na figura 5.2.

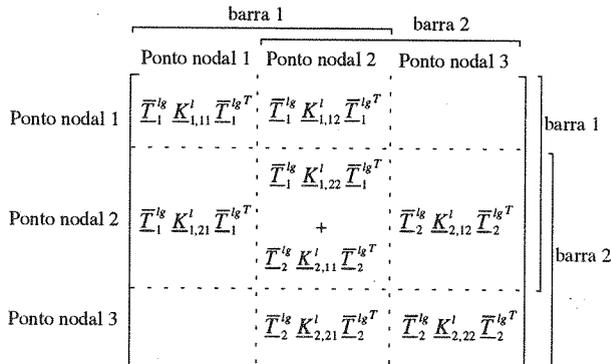


Figura 5.2 - Espalhamento das matrizes de rigidez das barras do pórtico representado na figura 5.1, na matriz de rigidez da estrutura.

Assim a matriz de rigidez da barra 1 é espalhada nas linhas e colunas de  $\underline{K}_E^g$ , correspondentes aos nós das suas extremidades (pontos nodais 1 e 2) e a matriz de rigidez da barra 2 é espalhada nas linhas e colunas de  $\underline{K}_E^g$ , correspondentes aos pontos nodais 2 e 3. Desta forma, verifica-se que nas linhas e colunas do ponto nodal 2 adiciona-se a contribuição de rigidez da extremidade direita da barra 1 com a rigidez da extremidade esquerda da barra 2.

## 6 - APOIOS ELÁSTICOS

Uma estrutura pode ter alguns dos seus pontos nodais ligados a elementos com comportamento elástico, exteriores à estrutura. Estes elementos podem ser, por exemplo, o

solo de suporte da estrutura, barras de outras estruturas ou qualquer elemento cuja deformabilidade é proporcional à força introduzida pela estrutura nesse elemento. A influência que estes elementos introduzem no comportamento da estrutura é tida em conta adicionando-se a rigidez desse elemento, à rigidez da estrutura,  $K_E^s$ . Num ponto nodal pode existir apoios elásticos introduzindo rigidez segundo qualquer dos graus de liberdade dum ponto nodal da estrutura. Assim, pode haver elementos com rigidez axial ou com rigidez à flexão. A rigidez axial é adicionada aos graus de liberdade correspondentes a deslocamentos, enquanto a rigidez à flexão é adicionada aos graus de liberdade correspondentes às rotações.

Considere-se que um determinado ponto nodal  $i$  da estrutura está ligado a um elemento com comportamento elástico, usualmente considerado como uma mola. Essa mola tem uma rigidez  $K_m^s$ , sendo  $\hat{i}_s$  o versor do eixo da mola, conforme se representa na Figura 6.1.

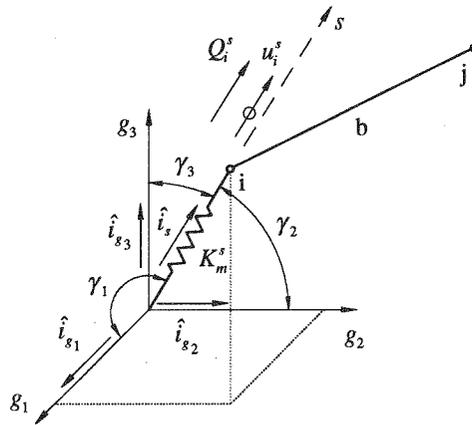


Figura 6.1 - Elemento elástico, tipo mola, ligado a um ponto nodal da estrutura.

Os ângulos efectuados por  $\hat{i}_s$  com  $\hat{i}_{g1}$ ,  $\hat{i}_{g2}$  e  $\hat{i}_{g3}$  são  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  e  $\gamma_3$ , conforme se representa na Figura 6.1, pelo que:

$$\hat{i}_s \cdot \hat{i}_{g1} = \cos\gamma_1; \hat{i}_s \cdot \hat{i}_{g2} = \cos\gamma_2; \hat{i}_s \cdot \hat{i}_{g3} = \cos\gamma_3 \quad (6.1)$$

que são os cosenos directores do versor  $\hat{i}_s$  no referencial global  $g$ . Assim,

$$\underline{T}^{sg} = \{\cos\gamma_1 \quad \cos\gamma_2 \quad \cos\gamma_3\}^T \quad (6.2)$$

é o vector que converte grandezas referidas ao eixo  $s$  da mola, em grandezas referidas ao sistema global de eixos,  $g$ . A equação de equilíbrio da mola segundo o seu eixo  $s$  será:

$$Q_i^s = K_m^s u_i^s \quad (6.3)$$

Como os deslocamentos e as forças nos referenciais  $s$  e  $g$  relacionam-se por intermédio das seguintes respectivas relações:

$$\underline{U}_i^g = \underline{T}^{sg} u_i^s \quad (6.4)$$

$$\underline{Q}_i^g = \underline{T}^{sg} Q_i^s \quad (6.5)$$

que substituídas em (6.3) conduzem à seguinte expressão:

$$\underline{Q}_i^g = \underline{K}_{mi}^g \underline{U}_i^g \quad (6.6)$$

em que

$$\underline{K}_{mi}^g = \underline{T}^{sg} \underline{K}_m^s \underline{T}^{sgT} \quad (6.7)$$

é a matriz de rigidez da mola no referencial global  $g$ . A matriz  $\underline{K}_{mi}^g$  deve ser adicionada à parte da matriz de rigidez da estrutura,  $\underline{K}_E^g$ , onde estão espalhados os coeficientes de rigidez associados ao ponto  $i$ , isto é,  $\underline{K}_{E,ii}^g$ . Se a mola tem rigidez axial,  $\underline{K}_{mi}^g$  deve ser somada às linhas e colunas de  $\underline{K}_{E,ii}^g$  relativas a graus de liberdade de deslocamentos. Se a mola tiver rigidez à flexão,  $\underline{K}_{mi}^g$  deve ser adicionada às linhas e colunas de  $\underline{K}_{E,ii}^g$  relativas a graus de liberdade de rotações. Na figura 6.2 exemplifica-se este procedimento para o caso de um pórtico contínuo tridimensional. Um ponto nodal desta estrutura tem seis graus de liberdade, sendo os três primeiros relativos a deslocamentos ( $u_{i1}^g, u_{i2}^g, u_{i3}^g$ ) e os três últimos relativos a rotações ( $u_{i4}^g, u_{i5}^g, u_{i6}^g$ ). Assim, se a mola desenvolver rigidez axial,  $\underline{K}_{mi}^g$  será adicionada às linhas e colunas de  $\underline{K}_{E,ii}^g$  correspondentes aos deslocamentos  $u_{i1}^g, u_{i2}^g, u_{i3}^g$ , conforme se representa na figura 6.2a. Se a mola tiver rigidez à flexão,  $\underline{K}_{mi}^g$  será adicionada às linhas e colunas de  $\underline{K}_{E,ii}^g$  correspondentes às rotações  $u_{i4}^g, u_{i5}^g, u_{i6}^g$ , conforme se representa na figura 6.2b.

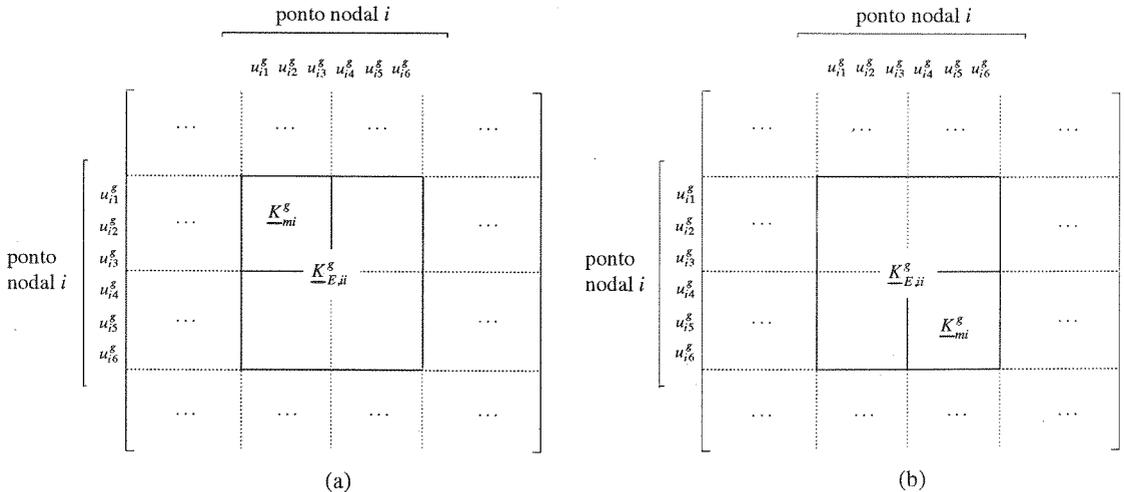


Figura - 6.2 Adição da contribuição de rigidez de uma mola com rigidez axial (a) e à flexão (b) na matriz de rigidez da estrutura  $\underline{K}_E^g$ .

## 7 - APOIOS INCLINADOS

Em algumas estruturas pode haver a necessidade ou o interesse de que os graus de liberdade de determinado ponto nodal fiquem estabelecidos num referencial diferente do local da barra e do global da estrutura. É o caso, por exemplo, dos pontos nodais de ligação da estrutura ao exterior, convencionalmente designados por apoios, em que os deslocamentos desses pontos nodais são prescritos num referencial diferente do da(s) barra(s), que se liga(m) a esse ponto e diferente do referencial global da estrutura. Neste caso diz-se, correntemente, que se trata de um apoio inclinado. Pode ainda haver interesse em se obter os deslocamentos de determinado ponto num referencial especificado.

Assim, considere-se que num determinado ponto  $i$  duma estrutura, os graus de liberdade são estabelecidos num referencial auxiliar,  $a$ , conforme se representa na Figura 7.1. Por simplicidade de exposição considere-se que a barra representada nesta figura faz parte de um pórtico plano.

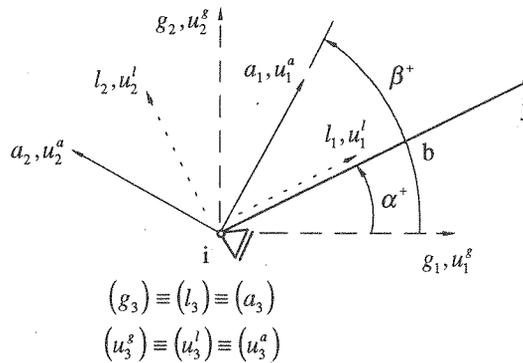


Figura 7.1 - Apoio inclinado.

Considerando as condições de ligação do ponto nodal  $i$ , verifica-se que se tem que impor que  $u_2^a = 0$  ou que é igual a um determinado valor prescrito não nulo (correntemente denominado de assentamento de apoio). Assim, os graus de liberdade do ponto  $i$  têm que ser referenciados ao sistema de eixos auxiliar  $a$ . Tal imposição conduz a que a submatriz de rigidez da estrutura, correspondente aos graus de liberdade associados ao ponto nodal  $i$ , tem que ser estabelecida no referencial auxiliar. O mesmo se passa para as forças nodais equivalentes associadas a este ponto nodal.

Os deslocamentos do ponto nodal  $i$  no referencial auxiliar são convertidos para o referencial global por intermédio das seguintes equações (no caso de pórtico contínuo plano):

$$\begin{Bmatrix} u_{1i}^g \\ u_{2i}^g \\ u_{3i}^g \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\text{sen}\beta & 0 \\ \text{sen}\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1i}^a \\ u_{2i}^a \\ u_{3i}^a \end{Bmatrix} \quad (7.1a)$$

ou

$$\underline{U}_i^g = \underline{T}_i^{ag} \underline{U}_i^a \quad (7.1b)$$

em que  $\underline{U}_i^g$  e  $\underline{U}_i^a$  são os deslocamentos do ponto  $i$  referidos ao sistema global de eixos da estrutura e ao sistema auxiliar de eixos, e  $\underline{T}_i^{ag}$  é a matriz que transforma os deslocamentos  $\underline{U}_i^a$  para o referencial global. Assim, para os deslocamentos da barra tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \underline{U}_i^g \\ \underline{U}_j^g \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{T}_i^{ag} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{T}_j^{ag} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{U}_i^a \\ \underline{U}_j^a \end{Bmatrix} \quad (7.2)$$

em que  $\underline{T}_i^{ag}$  é a matriz que converte  $\underline{U}_i^a$  para  $\underline{U}_i^g$ , caracterizada pelos cosenos directores que os eixos do referencial auxiliar efectua com os eixos do referencial global. Por sua vez,  $\underline{T}_j^{ag}$  inclui os cosenos directores que os eixos do referencial auxiliar associado ao nó  $j$  (que pode ser diferente do especificado no ponto  $i$ ) efectua com os eixos do referencial global. Se os deslocamentos do ponto  $j$  forem estabelecidos no referencial local da barra  $\underline{T}_j^{ag} = \underline{I}$  em que  $\underline{I}$  é a matriz identidade. O mesmo se passará em relação ao ponto  $i$ .

Tal como os deslocamentos, as forças nodais equivalentes aplicadas num apoio inclinado têm que ser convertidas para o referencial auxiliar pelo que se recorre à seguinte relação:

$$\underline{Q}_i^a = \underline{T}_i^{agT} \underline{Q}_i^g. \quad (7.3)$$

No caso da barra teremos:

$$\begin{Bmatrix} \underline{Q}_i^a \\ \underline{Q}_j^a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{T}_i^{agT} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{T}_j^{agT} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{Q}_i^g \\ \underline{Q}_j^g \end{Bmatrix}. \quad (7.4)$$

Como:

$$\begin{Bmatrix} \underline{Q}_i^g \\ \underline{Q}_j^g \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\bar{T}}_b^{lg} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\bar{T}}_b^{lg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{K}_{ii}^l & \underline{K}_{ij}^l \\ \underline{K}_{ji}^l & \underline{K}_{jj}^l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\bar{T}}_b^{lgT} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\bar{T}}_b^{lgT} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{U}_i^g \\ \underline{U}_j^g \end{Bmatrix} \quad (7.5)$$

que substituída em (7.4) e tendo em atenção (7.2) converte esta relação na seguinte:

$$\begin{Bmatrix} \underline{Q}_i^a \\ \underline{Q}_j^a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{T}_i^{agT} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{T}_j^{agT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\bar{T}}_b^{lg} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\bar{T}}_b^{lg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{K}_{ii}^l & \underline{K}_{ij}^l \\ \underline{K}_{ji}^l & \underline{K}_{jj}^l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\bar{T}}_b^{lgT} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\bar{T}}_b^{lgT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{T}_i^{ag} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{T}_j^{ag} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{U}_i^a \\ \underline{U}_j^a \end{Bmatrix}. \quad (7.6a)$$

Efectuando os sucessivos produtos matriciais obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \underline{Q}_i^a \\ \underline{Q}_j^a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{T}_i^{agT} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{T}_j^{agT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\bar{T}}_b^{lg} \underline{K}_{ii}^l \underline{\bar{T}}_b^{lgT} & \underline{\bar{T}}_b^{lg} \underline{K}_{ij}^l \underline{\bar{T}}_b^{lgT} \\ \underline{\bar{T}}_b^{lg} \underline{K}_{ji}^l \underline{\bar{T}}_b^{lgT} & \underline{\bar{T}}_b^{lg} \underline{K}_{jj}^l \underline{\bar{T}}_b^{lgT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{T}_i^{ag} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{T}_j^{ag} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{U}_i^a \\ \underline{U}_j^a \end{Bmatrix} \quad (7.6b)$$

$$\begin{Bmatrix} \underline{Q}_i^a \\ \underline{Q}_j^a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{T}_i^{agT} \underline{T}_b^{lg} \underline{K}_{ii}^l \underline{T}_b^{lgT} \underline{T}_i^{ag} & \underline{T}_i^{agT} \underline{T}_b^{lg} \underline{K}_{ij}^l \underline{T}_b^{lgT} \underline{T}_j^{ag} \\ \underline{T}_j^{agT} \underline{T}_b^{lg} \underline{K}_{ji}^l \underline{T}_b^{lgT} \underline{T}_i^{ag} & \underline{T}_j^{agT} \underline{T}_b^{lg} \underline{K}_{jj}^l \underline{T}_b^{lgT} \underline{T}_j^{ag} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{U}_i^a \\ \underline{U}_j^a \end{Bmatrix} \quad (7.6c)$$

$$\begin{Bmatrix} \underline{Q}_i^a \\ \underline{Q}_j^a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{T}_i^{agT} \underline{K}_{ii}^g \underline{T}_i^{ag} & \underline{T}_i^{agT} \underline{K}_{ij}^g \underline{T}_j^{ag} \\ \underline{T}_j^{agT} \underline{K}_{ji}^g \underline{T}_i^{ag} & \underline{T}_j^{agT} \underline{K}_{jj}^g \underline{T}_j^{ag} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{U}_i^a \\ \underline{U}_j^a \end{Bmatrix} \quad (7.6d)$$

$$\begin{Bmatrix} \underline{Q}_i^a \\ \underline{Q}_j^a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{ii}^a & \underline{K}_{ij}^a \\ \underline{K}_{ji}^a & \underline{K}_{jj}^a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{U}_i^a \\ \underline{U}_j^a \end{Bmatrix} \quad (7.6e)$$

Se os deslocamentos do ponto  $j$  não forem estabelecidos num referencial auxiliar então  $\underline{T}_j^{ag} = \underline{I}$ , pelo que a relação (7.6d) converter-se-á na seguinte:

$$\begin{Bmatrix} \underline{Q}_i^a \\ \underline{Q}_j^a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{T}_i^{agT} \underline{K}_{ii}^g \underline{T}_i^{ag} & \underline{T}_i^{agT} \underline{K}_{ij}^g \\ \underline{K}_{ji}^g \underline{T}_i^{ag} & \underline{K}_{jj}^g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{U}_i^a \\ \underline{U}_j^a \end{Bmatrix} \quad (7.7)$$

Se os deslocamentos do ponto  $i$  não forem estabelecidos num referencial auxiliar e os deslocamentos do ponto  $j$  forem prescritos num referencial auxiliar, então  $\underline{T}_i^{ag} = \underline{I}$  e a relação (7.6d) converter-se-á na seguinte:

$$\begin{Bmatrix} \underline{Q}_i^a \\ \underline{Q}_j^a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{ii}^g & \underline{K}_{ij}^g \underline{T}_j^{ag} \\ \underline{T}_j^{agT} \underline{K}_{ji}^g & \underline{T}_j^{agT} \underline{K}_{jj}^g \underline{T}_j^{ag} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{U}_i^a \\ \underline{U}_j^a \end{Bmatrix} \quad (7.8)$$

Finalmente se os deslocamentos dos nós da barra não forem estabelecidos em referenciais auxiliares, então  $\underline{T}_i^{ag} = \underline{T}_j^{ag} = \underline{I}$ , pelo que as equações de equilíbrio da barra vêm estabelecidas no referencial global da estrutura:

$$\begin{Bmatrix} \underline{Q}_i^g \\ \underline{Q}_j^g \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{ii}^g & \underline{K}_{ij}^g \\ \underline{K}_{ji}^g & \underline{K}_{jj}^g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{U}_i^g \\ \underline{U}_j^g \end{Bmatrix} \quad (7.9)$$

## 8 - VECTOR SOLICITAÇÃO

As estruturas reticuladas que o presente código computacional permite analisar podem ser submetidas às solicitações seguintes: forças generalizadas aplicadas em pontos nodais da estrutura segundo os eixos do referencial global; forças de volume segundo os eixos do referencial global; forças generalizadas distribuídas uniformemente nas barras segundo os eixos do referencial da barra; forças generalizadas distribuídas linearmente nas barras segundo os eixos do referencial da barra; forças generalizadas aplicadas em pontos do interior da barra segundo os eixos do seu referencial; variações de temperatura em barras; assentamentos de apoio.

Nos pontos nodais dos apoios inclinados as forças nodais equivalentes têm que ser convertidas para o referencial especificado.

## 9 - RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

O sistema de equações de equilíbrio (2.4) pode ser reorganizado da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \underline{K}_{E,II}^g & \underline{K}_{E,If}^g \\ \underline{K}_{E,fl}^g & \underline{K}_{E,ff}^g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_{E,I}^g \\ \underline{U}_{E,f}^g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Q}_{E,I}^g \\ \underline{Q}_{E,f}^g + \underline{R}_E^g \end{bmatrix} \quad (9.1)$$

em que  $\underline{K}_{E,II}^g$  inclui as linhas e as colunas de interacção entre graus de liberdade livres,  $\underline{K}_{E,ff}^g$  inclui as linhas e as colunas de interacção entre graus de liberdade fixos,  $\underline{K}_{E,If}^g = \underline{K}_{E,fl}^{gT}$  inclui os termos de rigidez afectos à interacção entre os graus de liberdade livres e fixos,  $\underline{U}_{E,I}^g$  e  $\underline{U}_{E,f}^g$  são as matrizes dos graus de liberdade livres, a determinar, e dos graus de liberdade fixos (de valor nulo ou imposto, como sejam os assentamentos de apoio), conhecidos, respectivamente,  $\underline{Q}_{E,I}^g$  e  $\underline{Q}_{E,f}^g$  são as matrizes das forças nodais equivalentes em correspondência com os graus de liberdade livres e fixos, respectivamente, e  $\underline{R}_E^g$  é a matriz das reacções nos apoios da estrutura. Em (9.1)  $\underline{U}_{E,I}^g$ ,  $\underline{U}_{E,f}^g$ ,  $\underline{Q}_{E,I}^g$ ,  $\underline{Q}_{E,f}^g$  e  $\underline{R}_E^g$  são matrizes, dado que incluem o conjunto de vectores correspondentes aos diversos casos de carga que actuam na estrutura.

A primeira linha de (9.1) assume a seguinte configuração:

$$\underline{K}_{E,II}^g \underline{U}_{E,I}^g = \underline{Q}_{E,I}^g - \underline{K}_{E,If}^g \underline{U}_{E,f}^g \quad (9.2)$$

donde se obtém  $\underline{U}_{E,I}^g$ , por intermédio da resolução do sistema de equações lineares (9.2). Note-se que em (9.2) as únicas incógnitas são  $\underline{U}_{E,I}^g$ . Determinado  $\underline{U}_{E,I}^g$ , a segunda linha de (9.1) permite obter as reacções nos apoios:

$$\underline{R}_E^g = \underline{K}_{E,fl}^g \underline{U}_{E,I}^g + \underline{K}_{E,ff}^g \underline{U}_{E,f}^g - \underline{Q}_{E,f}^g \quad (9.3)$$

## 10 - REFERÊNCIAS

Mota Freitas, "Sebenta de resistência dos materiais", Depart. de Eng<sup>a</sup> Civil da Faculdade de Engenharia Civil da Universidade do Porto.  
 Joaquim Barros, "Apontamentos da disciplina de estruturas", Depart. de Eng<sup>a</sup> Civil da Universidade do Minho  
 William Weaver; James M. Gere, "Matrix Analysis of Framed structures", Van Nostrand Reinhold, New York, 1990.