

ALÍPIO E. V. FERREIRA; ALVARO F. M. AZEVEDO

Cálculo da Capacidade Resistente e Dimensionamento de
Armaduras de Secções Quaisquer de Betão Armado e
Pré-esforçado Sujeitas a Flexão Composta Desviada

2º Encontro Nacional sobre Estruturas Pré-Esforçadas

Porto - Portugal

Novembro de 1988

**CALCULO DA CAPACIDADE RESISTENTE E
DIMENSIONAMENTO DE ARMADURAS DE
SECÇÕES QUAISQUER DE BETÃO ARMADO E PRE-ESFORÇADO
SUJEITAS A FLEXÃO COMPOSTA DESVIADA**

Alípio E. V. Ferreira *

Alvaro F. M. Azevedo **

RESUMO

Nesta comunicação é apresentado um modelo utilizado para cálculo à rotura de secções de betão armado e pré-esforçado sujeitas a flexão composta desviada e que serviu para elaboração dum programa de cálculo automático.

São apresentados alguns exemplos de cálculo das capacidades resistentes de secções, e de dimensionamento das armaduras.

* Engenheiro Civil (U.P.)

** Assistente da Fac. de Engenharia da Univ. do Porto

1. INTRODUÇÃO

O cálculo orgânico de secções de betão armado e pré-esforçado pode ser abordado de uma forma genérica como uma resolução dum sistema de equações não lineares (equações de equilíbrio), tendo sido utilizado o método de Newton Raphson.

Deste modo apenas foi necessário acrescentar ao programa genérico de resolução de sistemas de equações não lineares uma subrotina que fornece os 3 desequilíbrios (ΔN , ΔM_x , ΔM_y) , a partir das resultantes das tensões nos dois materiais e respectivos pontos de aplicação, para cada conjunto de valores das incógnitas.

Esta abordagem genérica permite que sem grandes alterações ao programa se possa ter como incógnitas do problema outros tipos de variáveis.

2. DESCRIÇÃO DO MODELO

2.1 Hipóteses

A geometria da secção de betão, bem como as posições das armaduras são definidas num referencial cartesiano qualquer, em cuja origem se consideram aplicados o esforço axial e os momentos flectores. O esforço normal é considerado positivo quando provoca tracções e os momentos flectores são positivos quando os respectivos vectores momento, de acordo com a regra do saca rolhas, tiverem o sentido dos eixos.

As extensões são consideradas positivas se se tratarem de alongamentos, e admite-se que as secções se mantêm planas durante a deformação.

2.3 Domínios de deformação

O diagrama de extensões fica univocamente definido por uma variável real D . Esta variável toma os valores inteiros 1, 2, 3 e 4 quando o diagrama de extensões corresponde à transição entre dois tipos de rotura diferentes (ex: $D=2$, transição entre rotura pelo betão e rotura pelo aço).

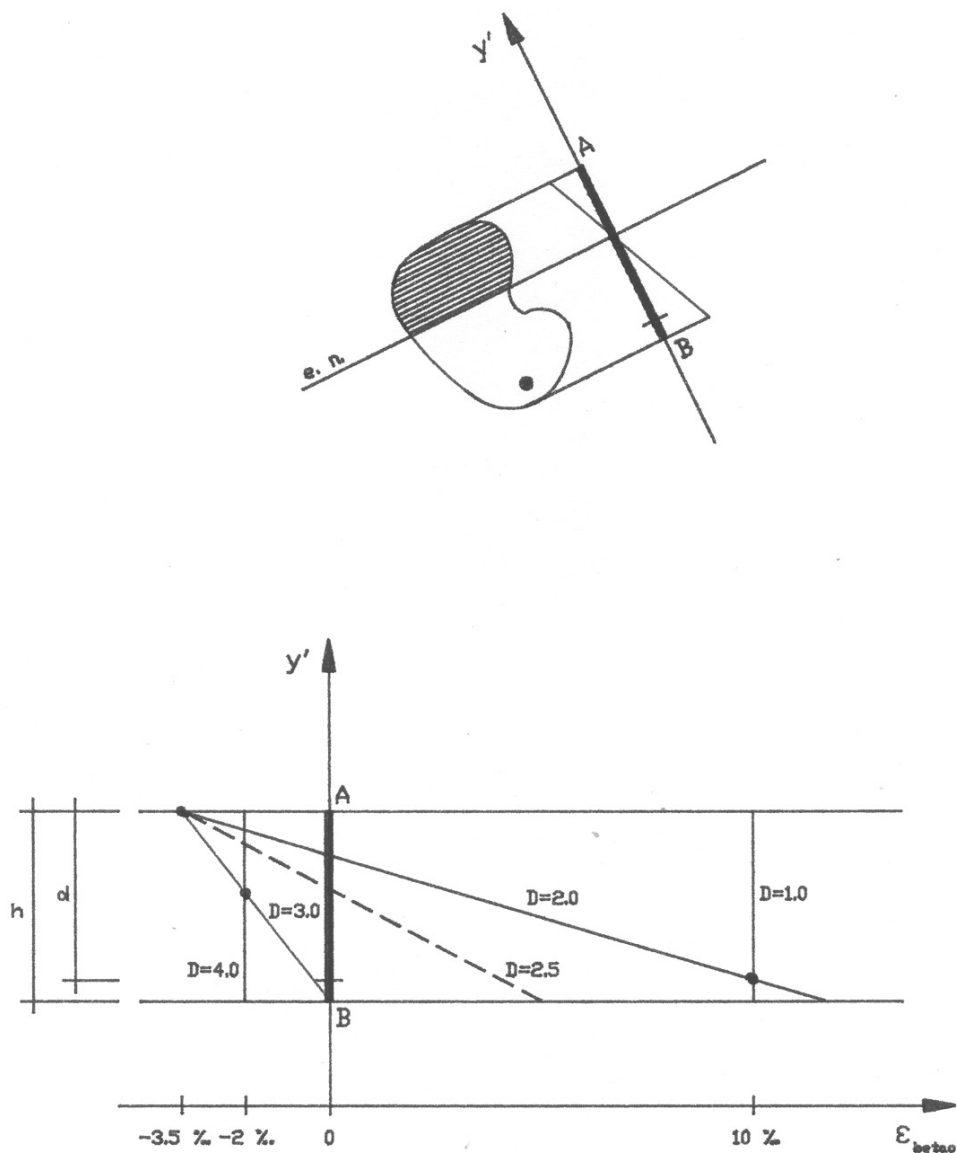


Fig. 2 - Domínios de deformação

Os diagramas de extensões correspondentes a valores reais de D ficam definidos por interpolação linear das extensões indicadas no quadro I .

Quadro I

D	ec,min	ec,max
1	0.010	0.010
2	-0.0035	K
3	-0.0035	0.0
4	-0.002	-0.002

$$K=0.0135*h/d-0.0035$$

ex: D=3.5 --> ec,min=-0.00275 ; ec,max=-0.001

O conjunto de domínios indicado na figura 1 pode ser orientado relativamente à secção transversal da peça com extensões crescentes ou decrescentes segundo o sentido positivo de y' . A distinção entre estas duas situações é feita atendendo ao sentido da componente do momento segundo o eixo neutro.

2.4 Equações de equilíbrio

O problema em causa consiste na resolução das 3 equações de equilíbrio :

$$\begin{aligned} N_d &= F_c + \sum F_s + \sum F_p \\ M_{d,x} &= F_c*y_c + \sum F_s*y_s + \sum F_p*y_p \\ M_{d,y} &= F_c*x_c + \sum F_s*x_s + \sum F_p*x_p \end{aligned} \quad (1)$$

Na resolução do sistema de equações não lineares foi utilizado o método de Newton Raphson complementado com a técnica de "line search", que se revelou indispensável devido às descontinuidades das equações.

O sistema de equações (1) pode ser escrito na forma mais genérica:

$$\tilde{f}(\tilde{x}) = \tilde{0}$$

Desenvolvendo em série de Taylor o primeiro membro obtem-se o seguinte sistema de equações lineares cujas incógnitas são os Δx_j :

$$f_i + \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \cdot \Delta x_j = 0 \quad (i=1,3 ; j=1,3)$$

Somando à solução actual os Δx_j multiplicados por α obtem-se a solução corrigida :

$$x_j^{r+1} = x_j^r + \alpha \Delta x_j$$

O valor do parametro de "line search" (α) é aquele que no intervalo $]0, 1[$ minimiza $\|f(x_{\sim}^{r+1})\|$.

Este método é iterativo necessitando de uma solução inicial cujos valores têm de ser arbitrados. A técnica de "line search" veio tornar a convergência do método praticamente independente da solução inicial.

2.5 Tipos de incógnitas

Das tres incógnitas do problema, duas são obrigatoriamente o domínio e a inclinação do eixo neutro. A terceira incógnita pode ser :

- o valor de um dos esforços N_{rd} , $M_{rd,x}$ ou $M_{rd,y}$
(determinação da capacidade resistente da secção)
- o valor da área total das armaduras
(as suas posições são conhecidas bem como as suas percentagens em relação á área total das armaduras)

2.6 Cálculo das forças nas armaduras

As forças nas armaduras ordinárias são obtidas directamente a partir das extensões nas mesmas.

Relativamente ao cálculo das forças nas armaduras de pré-esforço, estas são constituídas por duas parcelas distintas:

- a devida à tensão inicial por aplicação do pré-esforço
- a devida à extensão adicional das armaduras

2.7 Cálculo da força no betão

A contribuição das tensões no betão para as equações de equilíbrio é calculada como sendo o somatório das contribuições de cada faixa de tensão constante em que foi dividida a zona comprimida da secção. Estas faixas são obtidas recorrendo a um algoritmo de "hatching", que consiste no cálculo e ordenação dos pontos de intersecção de cada recta entre faixas com todos os segmentos de recta que constituem os contornos da secção. A integração numérica do diagrama parábola-rectângulo foi realizada recorrendo à regra de Simpson.

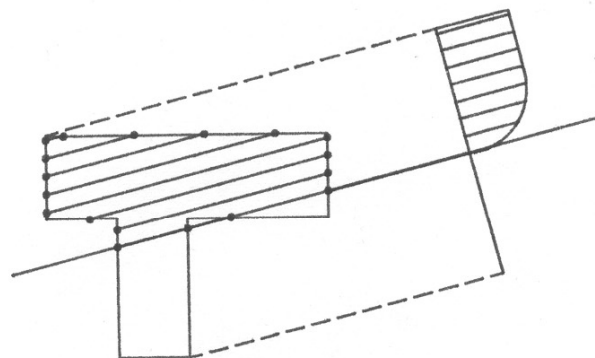
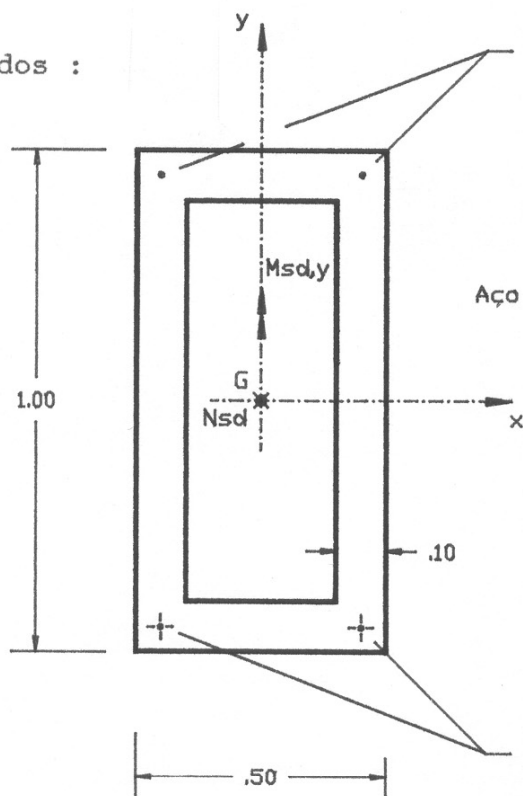


Fig. 3 - Exemplo de "hatching" numa secção irregular

3. EXEMPLOS

Exemplo 1 :

Dados :



Armadura ordinária = $2 \times 10 \text{ cm}^2$

Materiais:

Betão - B30

Aço - A400

Aço de pré esforço $\left[\begin{array}{l} f_{pd} = 1423.0 \text{ MPa} \\ G_{p\infty} = 1067.0 \text{ MPa} \end{array} \right.$

Esforços Actuantes:

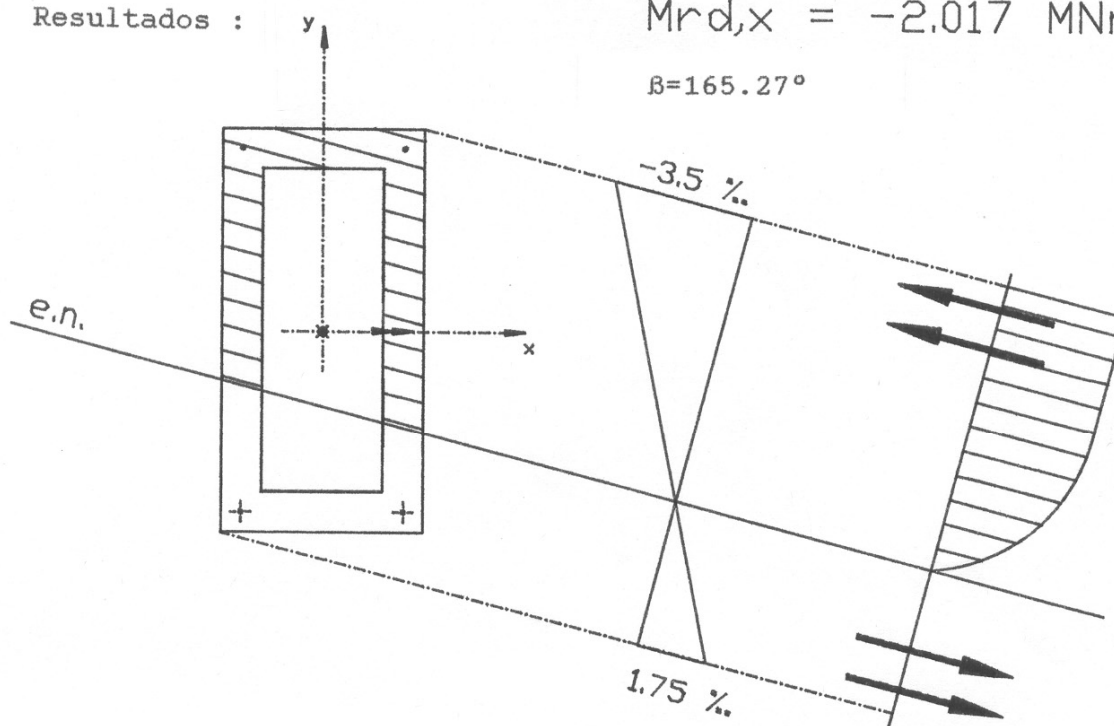
$M_{sd,y} = 50 \text{ kNm}$

$N_{sd} = -50 \text{ kN}$

Resultados :

$M_{rd,x} = -2.017 \text{ MNm}$

$\beta = 165.27^\circ$

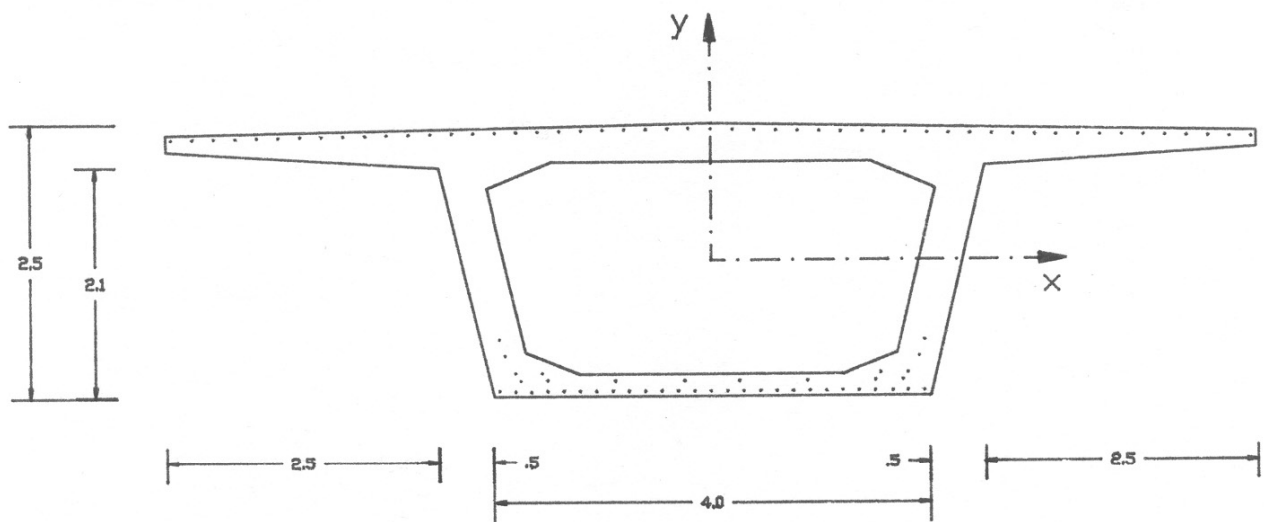


outra solução: $M_{rd,x} = 0.403 \text{ MNm}$; $\beta = 13.82^\circ$

Exemplo 2 :

Dados : $M_{sd,y} = 50.0 \text{ MNm}$

$N_{sd} = 0.0$



Materials:

Betão - B30

Aço - A400

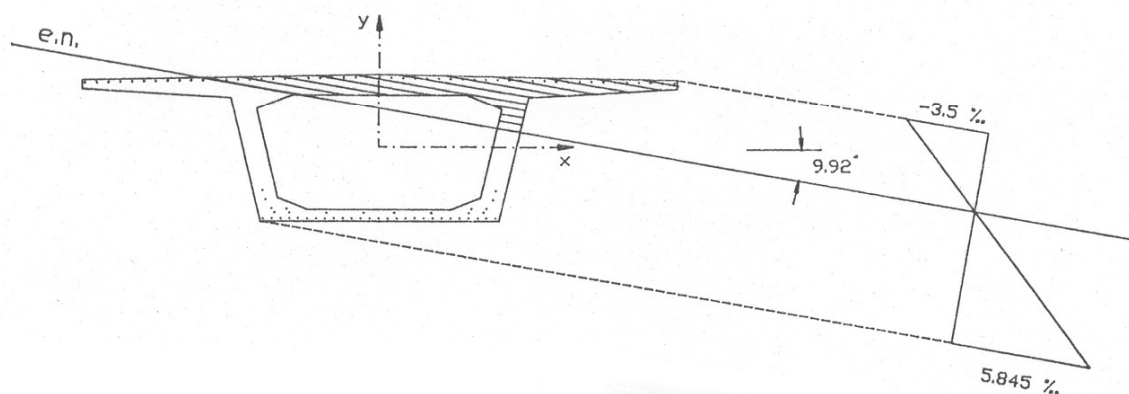
Aço de pré esforço: $\left[\begin{array}{l} f_{pd} = 1452.2 \text{ MPa} \\ \sigma_{p\infty} = 1100.0 \text{ MPa} \end{array} \right.$

Armadura de pré esforço = $16 * 11.16 \text{ cm}^2$

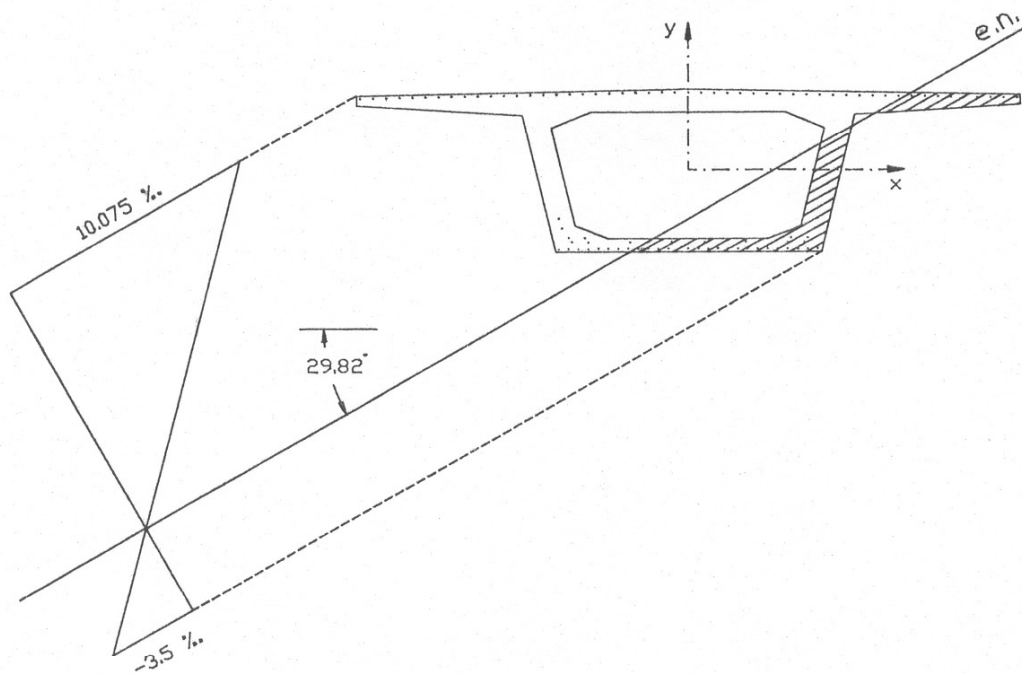
Armaduras passivas: $\left[\begin{array}{l} \text{inferior} = 27 \phi 16 \\ \text{superior} = 50 \phi 10 \end{array} \right.$

Resultados :

$$M_{rd,x} = -57.134 \text{ MNm}$$



$$M_{rd,x} = -9.120 \text{ MNm}$$



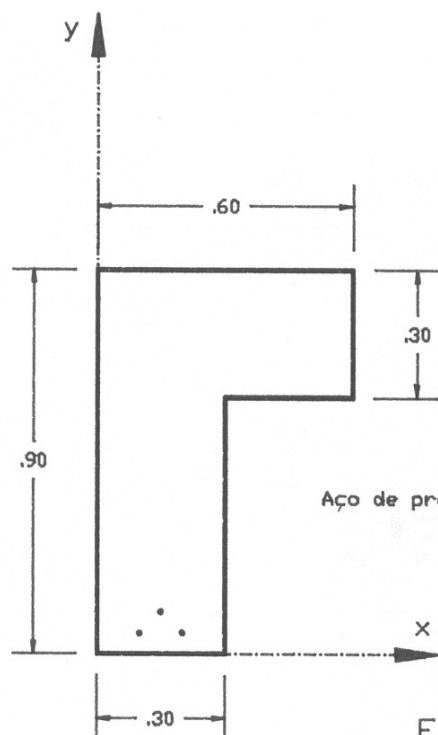
Nota: Foram confirmados os resultados deste exemplo em flexão plana [3].

$M_{rd,x} = -58.735 \text{ MNm}$; $\epsilon_{c,inf} = 10.24\%$; $\epsilon_{c,sup} = -1.84\%$.

$M_{rd,x} = 5.144 \text{ MNm}$; $\epsilon_{c,inf} = -2.57\%$; $\epsilon_{c,sup} = 10.26\%$.

Exemplo 3:

Dados:



Materials:

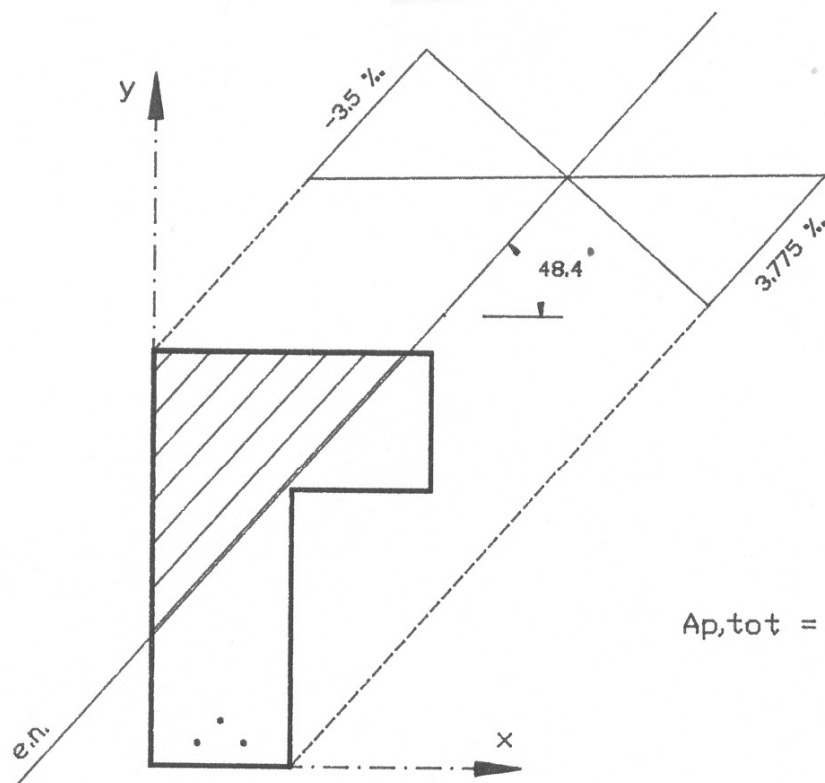
Betão - B30

Aço de pré esforço $\left[\begin{array}{l} f_{pd} = 1423.0 \text{ MPa} \\ \sigma_{p0} = 1067.0 \text{ MPa} \end{array} \right.$

Esforços Actuantes:

$M_{sd,x} = -1.0 \text{ MNm}$

Resultados :



$A_{p,tot} = 10.58 \text{ cm}^2$

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este programa facilita o cálculo de secções irregulares, sendo aplicável a todos os casos que podem surgir em projecto. Pode ser utilizado a partir dum ficheiro de dados ou como uma subrotina a incorporar em programas de pós-processamento mais gerais de cálculo de estruturas.

O tempo de cálculo de cada um dos exemplos apresentados nunca excedeu 1 minuto num minicomputador, dependendo dos valores arbitrados para a solução inicial.

5. REFERENCIAS

- [1] CEB/FIP Manual on Bending and Compression, Construction Press, (1982).
- [2] ARGAL e LIMA, J.;MONTEIRO, V.;MUN, M. - Betão Armado - Esforços Normais e de Flexão, LNEC (1985).
- [3] MARINHO MARQUES, E. - Verificação da Segurança aos Estados Limites Ultimos de Resistencia de Peças de Betão Armado Solicitadas à Flexão Composta Plana, Provas de Aptidão Pedagógica e Capacidade Científica, FEUP (1985).
- [4] R.E.B.A.P. - Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-Esforçado (1983).

Agradecimentos :

- por toda a colaboração prestada na preparação dos desenhos no Autocad, os nossos sinceros agradecimentos ao colega Ricardo Santos.