

## OPTIMIZAÇÃO DA FORMA DE UMA PONTE METÁLICA

Alvaro F. M. Azevedo\*, António Adão da Fonseca\*\*/\*\*\* e Rui Oliveira\*\*\*

\* Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto  
Departamento de Engenharia Civil  
Rua Dr. Roberto Frias, s/n, 4200-465 Porto, Portugal  
e-mail: alvaro@fe.up.pt, web <http://www.fe.up.pt/~alvaro>

\*\* Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto  
Departamento de Engenharia Civil  
Rua Dr. Roberto Frias, s/n, 4200-465 Porto, Portugal  
e-mail: adaodafonseca@fe.up.pt, web <http://www.fe.up.pt>

\*\*\* AFAssociados – Projectos de Engenharia, SA  
Cais do Lugan, 224, 4400-492 Vila Nova de Gaia, Portugal  
e-mail: afa@mail.telepac.pt

**Palavras chave:** Optimização de Estruturas, Optimização de Pontes, Método de Lagrange-Newton, Métodos de Segunda Ordem.

**Resumo.** *Neste artigo é apresentada uma aplicação de técnicas de optimização na pesquisa de novas formas para as vigas treliçadas de uma ponte pedonal metálica, admitindo um comportamento linear elástico para o material estrutural. Com esta abordagem foi possível encontrar uma solução que, devido à sua irregularidade, apresenta uma estética não convencional, sem contudo se terem agravado os custos associados a uma construção muito heterogénea. A solução proposta foi ao encontro do objectivo do Arquitecto da equipa de projecto, o qual pretendeu uma solução estética norteada por critérios estruturais, tendo o projecto de execução sido desenvolvido com base na geometria gerada pelo algoritmo de optimização. Este algoritmo baseia-se no método de Lagrange-Newton e tem-se revelado robusto, preciso e eficiente.*

## 1. INTRODUÇÃO

As técnicas de optimização de estruturas têm sido essencialmente aplicadas a problemas académicos destinados a evidenciar as respectivas características [1]. Devido a limitações nas respectivas formulações ou nos próprios algoritmos de optimização, os problemas são em geral simplificados, afastando-se assim das características inerentes ao projecto de uma estrutura real. Noutros casos, as economias associadas à solução “óptima” estabelecida pelo critério de optimização são obtidas à custa de uma exagerada heterogeneidade da solução final, que se traduz em custos adicionais de fabricação e do processo construtivo [2], eliminando as vantagens da optimização inicial.

As técnicas mais utilizadas na optimização de estruturas têm sido as que combinam um programa de análise estrutural com um módulo de análise de sensibilidades de primeira ordem e com um algoritmo de optimização baseado nessas derivadas [3]. Como alternativa a essas técnicas, existe a possibilidade de se utilizarem também derivadas de segunda ordem de modo a melhorar a qualidade da aproximação utilizada [4], ou então dispensar completamente as derivadas de modo a baixar a probabilidade de se obter como solução um mínimo local [5]. Como é habitual, todas as técnicas apresentam vantagens e inconvenientes, que dependem em grande parte do tipo de problema que se pretende resolver e dos meios computacionais disponíveis. No presente trabalho optou-se pela formulação do problema de optimização como um único programa matemático [6] que é resolvido com o recurso a primeiras e segundas derivadas de todas as funções intervenientes. Este método é descrito na Secção 3.

## 2. OPTIMIZAÇÃO DA FORMA DE UMA TRELIÇA

Os problemas de optimização de treliças podem ser classificados em três categorias: optimização das secções transversais, optimização da forma e optimização da topologia. No primeiro caso, a topologia e a geometria dos elementos estruturais são fixas, sendo apenas dimensionadas as características das secções transversais das barras [7]. No caso da optimização da forma, permite-se uma modificação das coordenadas dos nós para uma topologia pré-definida [8]. Neste caso é também comum permitir-se a modificação das características das secções transversais. No caso da optimização da topologia, existe uma total liberdade na escolha da solução estrutural, em geral não sendo sequer pré-definido o número de barras a utilizar nem o modo como elas se ligam entre si [9].

No presente trabalho é efectuada a optimização da forma da treliça de uma ponte pedonal metálica com dimensionamento simultâneo das secções transversais, admitindo um comportamento linear elástico para o material estrutural. O objectivo do Arquitecto João Luís Carrilho da Graça era o de utilizar um critério estrutural na definição da arquitectura da treliça. Por esse motivo, o dimensionamento da estrutura foi formulado como um problema de optimização em que a função objectivo a minimizar é a que traduz o custo da solução, que neste caso foi considerado proporcional ao volume de material utilizado nas barras da treliça. Por razões arquitectónicas, foi imposto que todas as barras tivessem a mesma secção transversal exterior.

No caso geral, a função custo é a seguinte

$$Custo = \sum_{j=1}^n C_j L_j A_j \quad (1)$$

sendo  $n$  o número total de barras,  $C_j$  o custo por unidade de volume do material utilizado na barra  $j$ ,  $L_j$  o comprimento da barra e  $A_j$  a área da respectiva secção transversal. No presente estudo, os valores de  $C_j$  são unitários, figurando  $L_j$  e  $A_j$  como variáveis do problema de optimização. Para além destas, são também variáveis algumas coordenadas de nós, bem como os deslocamentos dos nós não restringidos.

As leis de comportamento da estrutura têm de ser respeitadas, sendo esta imposição explicitada por intermédio de restrições igualdade. Estas restrições são as equações de equilíbrio, as equações de compatibilidade e as relações constitutivas do material estrutural. No presente estudo, foi efectuada a prévia substituição das equações de compatibilidade e das relações constitutivas nas restantes equações, de modo a diminuir o número de variáveis e de restrições.

As tensões instaladas nas barras e os deslocamentos de alguns nós têm naturalmente de ser limitados. Nas barras comprimidas é ainda necessário impor limitações adicionais para atender ao fenómeno da encurvadura. Estas restrições são do tipo desigualdade.

### 3. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OPTIMIZAÇÃO

O problema descrito na Secção 2 constitui um programa matemático cuja forma genérica é a seguinte

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } f(\underline{x}) && \underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \\ & \text{sujeito a} && \\ & \underline{g}(\underline{x}) \leq \underline{0} && \underline{g} = (g_1, \dots, g_m) \\ & \underline{h}(\underline{x}) = \underline{0} && \underline{h} = (h_1, \dots, h_p) \end{aligned} \quad (2)$$

Neste programa matemático as variáveis  $x_i$  são reais, podendo assumir qualquer valor positivo ou negativo. O programa de computador utilizado no âmbito deste trabalho para resolver o problema (2) tem a designação genérica de NEWTOP, encontrando-se descrito com mais pormenor em [2] e [4]. Neste programa de computador, as funções  $f$ ,  $g$  e  $h$  têm de ser polinómios generalizados, cuja forma é descrita com o exemplo seguinte:

$$f(\underline{x}) = 5.9 x_1^2 x_4^{-3} - 3.1 x_2 + 2.7 x_1^{-1} x_3 x_5^2 - 1.8 \quad (3)$$

Recorrendo a algumas transformações elementares, é possível formular o programa matemático correspondente a um problema de optimização da forma de uma treliça utilizando apenas expressões do tipo (3) [10].

O programa NEWTOP apresenta ainda as seguintes características [2][4]:

- cada uma das restrições desigualdade é transformada numa restrição igualdade por adição de uma variável de folga ( $s$ ) elevada ao quadrado ( $g(\underline{x}) \leq 0 \rightarrow g(\underline{x}) + s^2 = 0$ );
- são utilizadas técnicas de *scaling*, i.e., quer as variáveis quer as restrições são multiplicadas por factores de escala cujo valor é calculado com base na solução inicial do problema;
- as condições necessárias de optimalidade consistem no anulamento do gradiente do Lagrangeano correspondente ao programa matemático (2);
- o correspondente sistema de equações não lineares é resolvido pelo método de Newton;
- todas as primeiras e segundas derivadas são calculadas de um modo exacto e eficiente recorrendo a técnicas de programação simbólica, que no caso das expressões do tipo (3) são muito simples;
- em cada iteração do método de Newton é resolvido um sistema de equações lineares, sendo tida em consideração a esparsidade da matriz Hessiana de modo a tornar este processo mais eficiente;
- são utilizadas técnicas de pesquisa unidimensional (*line search*) para diminuir o risco de não convergência do processo iterativo.

O programa NEWTOP tem sido aplicado na resolução de inúmeros problemas de optimização, tendo-se revelado robusto, versátil, eficiente e preciso. Esta última qualidade deve-se à convergência quadrática que o método de Newton possui a partir do ponto em que a solução corrente se encontra suficientemente próxima da solução final. As principais desvantagens do método aqui apresentado são as dificuldades de convergência sempre que a solução inicial se encontra muito distante da solução final, o risco de convergência para um mínimo local, o facto de nalguns casos ser trabalhoso escrever todas as funções com base em expressões do tipo (3) e um avolumar do número de variáveis e restrições sempre que existem muitas variáveis de comportamento (e.g., deslocamentos dos nós). Estas desvantagens tornam-se menos importantes desde que se tenha algum cuidado na preparação da solução inicial e devido ao facto de hoje em dia se ter facilmente acesso a computadores rápidos e com grande capacidade de memória.

#### **4. OPTIMIZAÇÃO DE UMA PONTE PEDONAL**

É em seguida descrito um problema de procura de uma solução estrutural para uma ponte pedonal situada no campus da Universidade de Aveiro (Portugal). A ponte destina-se a fazer a ligação entre duas áreas do campus que se encontram separadas por uma zona pantanosa e alagadiça designada por Esteiro de S. Pedro. Devido à topografia do local, o comprimento total da ponte tem de ser da ordem dos 300 metros, com os pilares localizados em pontos pré-definidos por outros critérios.

Como condicionantes impostas à partida, referem-se as seguintes (ver a Figura 1):

- solução estrutural baseada numa treliça metálica de altura constante (4.00m) e largura constante (4.00m);
- largura da zona acessível a peões e bicicletas: 3.00m;
- banzo inferior constituído por duas vigas longitudinais em perfil I ligadas por uma laje de betão armado com 0.15m de espessura;
- em cada tramo um vão de 36.00m entre eixos de apoios em pilares;
- cumprir o estipulado no Regulamento de Segurança e Acções e no Regulamento de Estruturas de Aço para Edifícios.

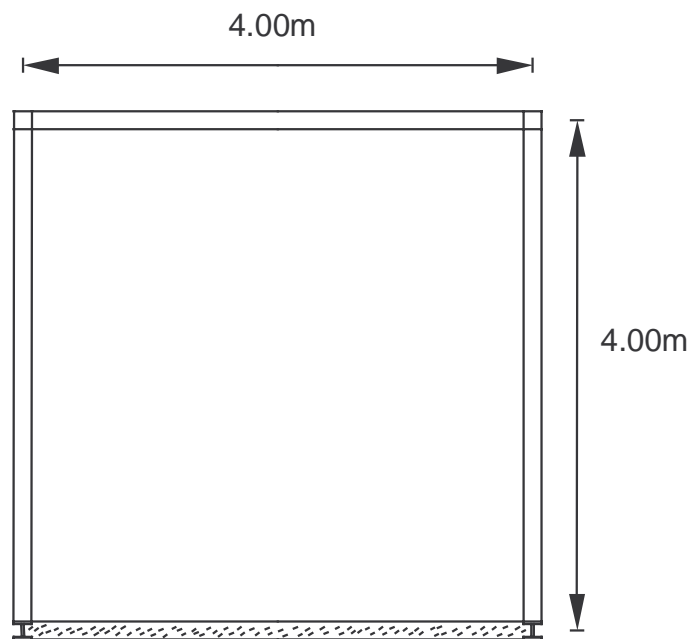


Figura 1. Corte transversal da ponte pedonal.

Como solução inicial para o problema de optimização da forma foi considerada a topologia representada na Figura 2, portanto com uma geometria baseada na distribuição uniforme das diagonais.

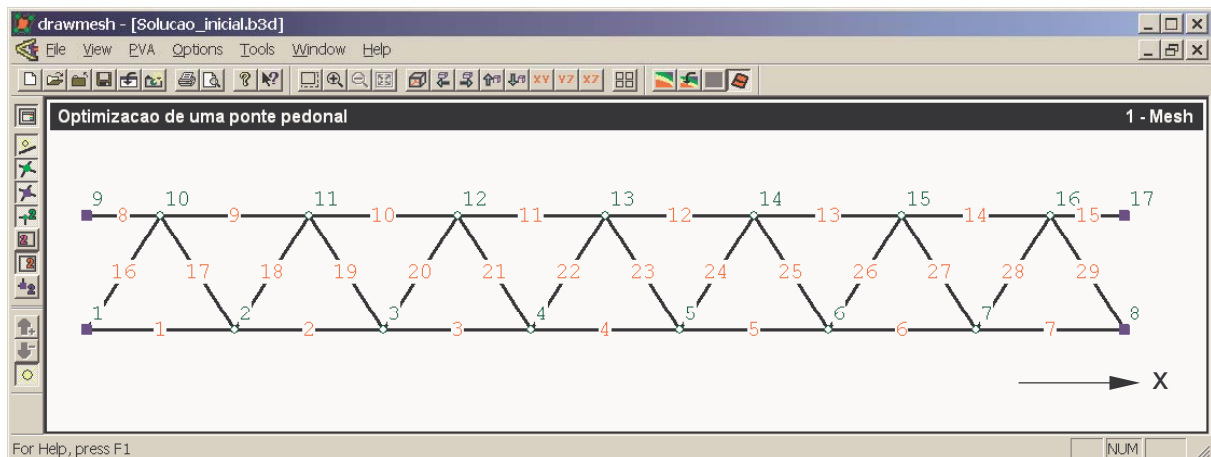


Figura 2. Solução inicial – topologia e geometria regulares.

No estudo de optimização foi sempre considerado um modelo de treliça plana sujeita apenas a acções gravíticas (peso próprio e sobrecarga uniforme na laje do tabuleiro). Os efeitos das acções horizontais foram depois analisados na fase de Projecto de Execução, que foi desenvolvido com base na geometria optimizada para acções verticais. A tensão em cada barra foi limitada, tendo sido considerado o fenómeno da encurvadura com todos os nós impedidos de se deslocarem na direcção normal ao plano da treliça, devido aos contraventamentos horizontais existentes. A secção transversal de cada barra é quadrada (12cm de lado), tendo-se permitido que a espessura da chapa varie de barra para barra. Deste modo fica salvaguardada a uniformidade exterior das barras e evitam-se dificuldades na soldadura entre perfis com diferentes dimensões externas da secção transversal. Todas as premissas introduzidas no estudo de optimização foram depois verificadas na fase de Projecto de Execução, não tendo surgido qualquer necessidade de reformulação da solução proposta na fase de concepção/optimização.

A partir da geometria inicial representada na Figura 2 foi efectuada uma primeira optimização da solução considerando que apenas as áreas das secções transversais podiam variar. Deste modo foi possível proceder à optimização da forma com base numa solução inicial em que a distribuição das secções é já próxima da correspondente à solução final.

Na fase de optimização da forma permitiu-se que variassem simultaneamente as áreas das secções transversais e as coordenadas  $x$  dos nós 2 a 7 e 10 a 16 (ver Figura 2). Dado que o dimensionamento final das barras do banzo inferior é fortemente condicionado pela flexão provocada pelo peso da laje de betão, foi imposto que essas barras fossem todas iguais ao agruparem-se numa única variável de projecto. Foram também agrupadas duas a duas as barras da metade esquerda e da metade direita da treliça, para forçar a convergência para uma solução simétrica. Verificou-se então que a diminuição do peso da estrutura ocorria com o aumento do comprimento das barras 2, 6, 10, 13, 19 e 26 para valores exageradamente elevados, enquanto que a barra 4 tendia para um comprimento

quase nulo. Uma vez que a laje do tabuleiro também funciona à flexão e as barras do banzo superior podem ficar muito comprimidas quando actua o vento, foi imposto um comprimento máximo de 6.00m nas barras horizontais. Para impedir o aparecimento de uma solução de aparência muito desequilibrada foi ainda imposto um comprimento mínimo de 2.00m para a barra 4. Como consequência destas restrições adicionais, foi obtida uma solução óptima em que as barras 1, 2, 6, 7, 10 e 13 apresentam o comprimento máximo de 6.00m e a barra 4 apresenta o comprimento mínimo de 2.00m (ver Figura 3).

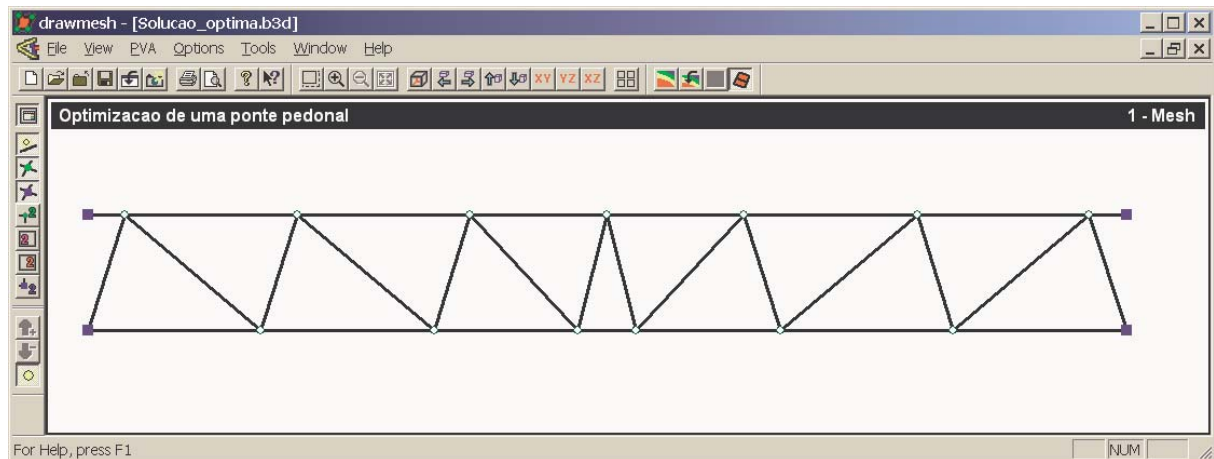


Figura 3. Solução óptima obtida - geometria.

Na Figura 4 encontra-se uma representação gráfica em que cada barra é representada como um cilindro cuja área da base é proporcional à área da secção transversal da barra na solução óptima. Convergem para o valor mínimo da área as barras 10, 13, 21, 22, 23 e 24. Como seria de esperar, as maiores áreas de secção transversal situam-se junto aos apoios e no banzo superior junto ao meio-vão. Nesta zona, as diagonais são pouco solicitadas, fazendo apenas a ligação entre os dois banzos.



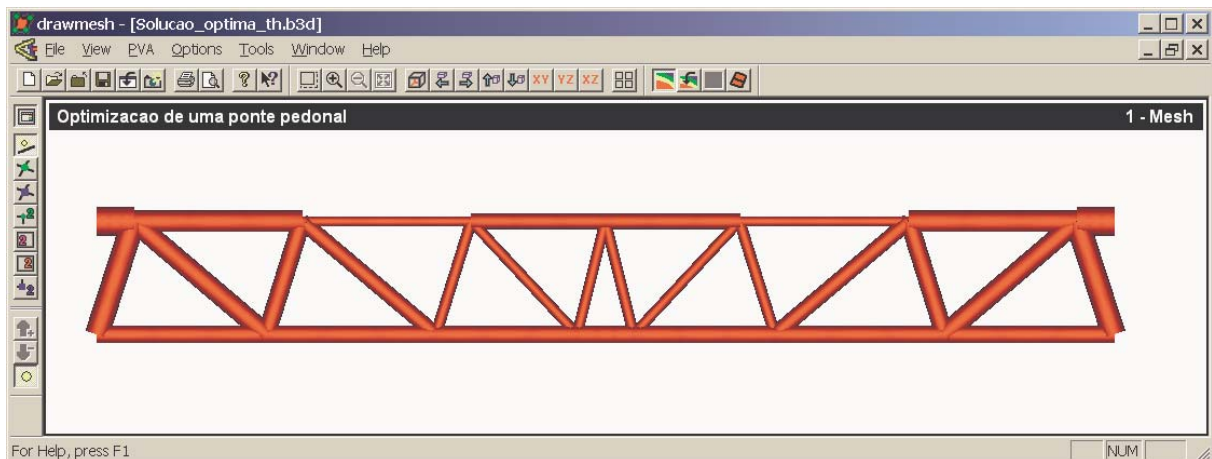


Figura 4. Solução óptima obtida – secções das barras.

A solução óptima obtida para um dos tramos intermédios foi repetida nos 8 tramos da ponte, tendo sido sujeita a ligeiras adaptações aos encontros nos tramos extremos. Na Figura 5 pode-se observar o aspecto do conjunto.

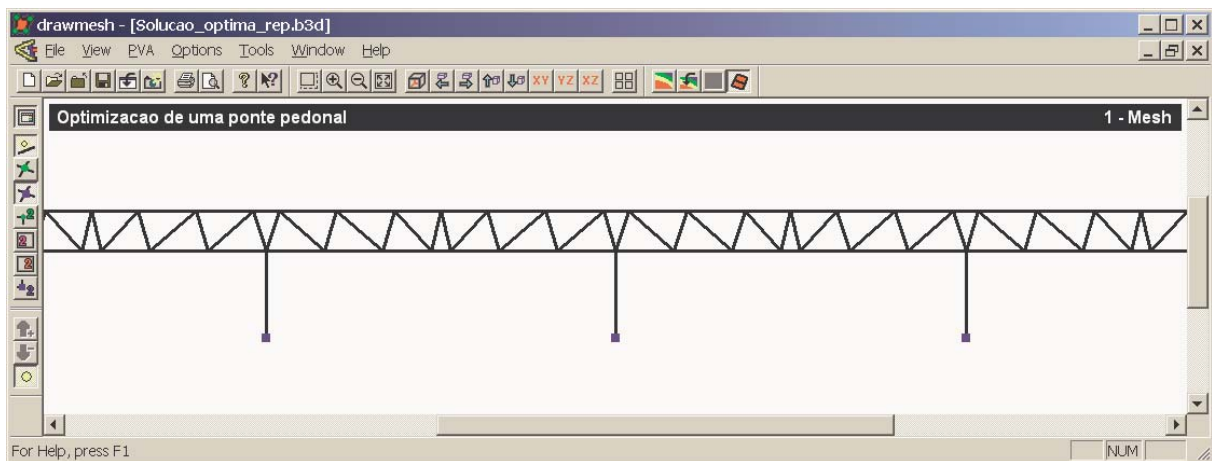


Figura 5. Solução óptima repetida nos diversos tramos.

A ponte pedonal foi inaugurada em Junho de 2001, podendo-se observar nas Figuras 6 a 10 o aspecto final da obra.





Figura 6. Ponte pedonal – vista lateral.



Figura 7. Ponte pedonal – perspectiva com a Universidade de Aveiro ao fundo.



Figura 8. Ponte pedonal – tramo intermédio.



Figura 9. Ponte pedonal – vista de baixo.





Figura 10. Ponte pedonal – vista do interior.

## 5. CONCLUSÕES

Neste artigo é evidenciada a possibilidade de se tirar partido das técnicas de optimização de estruturas para encontrar soluções arquitectónicas não convencionais mas estruturalmente criteriosas. Mesmo impondo restrições ao grau de heterogeneidade da solução, foi possível obter uma economia de 10 a 15% relativamente à solução convencional inicial, no volume de material utilizado. Desde que se encontrem disponíveis as ferramentas informáticas apropriadas, é possível chegar a soluções óptimas em tempo útil, uma vez que, por exemplo no estudo aqui descrito, o processo iterativo demora poucos minutos num computador pessoal, sendo viável realizar vários ensaios numéricos até se chegar a uma solução satisfatória. Já depois de inaugurada, a ponte pedonal foi objecto de rasgados elogios [11]. Este caso de estudo veio mais uma vez confirmar que existe uma coincidência entre as soluções estruturalmente óptimas e as soluções esteticamente “valorizadas”.

## REFERÊNCIAS

- [1] E. Ramm, K. U. Bletzinger, R. Reitering and K. Maute, *The challenge of structural optimization*. B. H. V. Topping and M. Papadrakakis eds. *Advances in Structural Optimization*, Civil Comp Press, Edinburgh (1994), pp. 27-52.
- [2] A. F. M. Azevedo, *Second-order structural optimization*. S. Hernandez, M. El-Sayed and C. A. Brebbia eds. *Computer Aided Optimum Design of Structures IV-OPTI 95*, Computational Mechanics Publications (1995), pp. 67-74.
- [3] C. Fleury, *Computer aided optimal design of elastic structures*. C. A. Mota Soares ed. *Computer aided optimal design: structural and mechanical systems*, Springer-Verlag (1987), pp. 831-900.
- [4] A. F. M. Azevedo, *Optimização de estruturas com comportamento linear e não linear*, Tese de Doutoramento, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto (Portugal), (1994).
- [5] C. S. Krishnamoorthy, P. Prasanna Venkatesh and R. Sudarshan, “Object-oriented framework for genetic algorithms with application to space truss optimization”, *Journal of Computing in Civil Engineering*, **Vol. 16, No. 1**, 66-75 (January 2002).
- [6] B. Barthelemy, R. T. Haftka, U. Madapur and S. Sankaranarayanan, “Integrated Structural Analysis and Design using 3D Finite Elements”, *30<sup>th</sup> Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Mobile, Alabama*, (1989), pp. 1305-1310.
- [7] U. Kirsch, *Optimum structural design, concepts methods and applications*, McGraw-Hill, (1981).
- [8] G. N. Vanderplaats, *Numerical optimization techniques for engineering design: with applications*, McGraw-Hill, (1984).
- [9] E. Ramm and K. Maute, “Topology optimization – a general tool in structural design”, *Euro-C – Computational Modelling of Concrete Structures (Proceedings)*, Innsbruck, Pineridge Press, (1994), pp. 805-824.
- [10] A. F. M. Azevedo and A. Adão da Fonseca, *Second-order shape optimization of a steel bridge*. S. Hernandez, A. J. Kassab and C. A. Brebbia eds. *Computer Aided Optimum Design of Structures VI-OPTI 99*, WIT Press, Southampton (1999), pp. 67-76.
- [11] M. Graça Dias, “A ponte das bicicletas”, *Revista do Jornal Expresso* (25/8/2001) ([http://semanal.expresso.pt/revista/qualidade/interior.asp?edicao=1504&id\\_artigo=ES34330](http://semanal.expresso.pt/revista/qualidade/interior.asp?edicao=1504&id_artigo=ES34330)).