

ALVARO F. M. AZEVEDO

Elemento Finito Triangular

Disciplina de Cálculo Automático de Estruturas

5º ano da Licenciatura em Engenharia Civil

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto - Portugal

Novembro 2003

## CAPÍTULO 61 (numeração provisória)

### ELEMENTO FINITO TRIANGULAR

Neste capítulo é apresentada a formulação de um elemento finito triangular de três nós, destinado à análise de estados planos de tensão pelo método dos deslocamentos. Uma vez que se supõe que o elemento é de espessura constante e é constituído por um material homogéneo e isotrópico, a correspondente formulação resulta muito simples.

#### 61.1 - Simbologia

Apresenta-se em primeiro lugar um resumo da simbologia adoptada neste capítulo.

Tabela 61.1 - Simbologia relativa à formulação de elementos finitos triangulares.

$h$	Espessura do elemento finito laminar
$x$	Coordenada cartesiana
$u$	Campo de deslocamentos
$a$	Deslocamento nodal
$N$	Função interpoladora ou função de forma
$N_V$	Vector das funções interpoladoras ou funções de forma
$c$	Coefficiente de um termo de um polinómio
$V$	Vector contendo os factores não constantes de um polinómio
$\bar{x}$	Coordenada cartesiana de um nó de um elemento finito
$Q$	Matriz cujas colunas contêm o vector $\underline{V}$ avaliado em nós do elemento finito
$\Delta$	Determinante principal da matriz $\underline{Q}$
$q$	Elemento da matriz $\underline{Q}^{-1}$
$m$	Número de direcções consideradas (no estado plano de tensão: $m = 2$ )

$n$	Número de nós do elemento finito
$p$	Número de graus de liberdade do elemento finito ( $p = n \times m$ )
$\varepsilon$	Extensão
$\gamma$	Distorção
$L$	Operador diferencial
$q$	Número de componentes do vector $\underline{\varepsilon}$ e do vector $\underline{\sigma}$
$B$	Matriz de deformação
$\sigma$	Tensão normal
$\tau$	Tensão tangencial
$E$	Módulo de elasticidade ou módulo de Young
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$D$	Matriz de elasticidade ( $\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon}$ )
$V$	Volume do elemento finito
$K$	Matriz de rigidez do elemento finito no referencial geral
$F$	Forças nodais equivalentes à acção exterior, nos graus de liberdade do elemento finito, no referencial geral
$S$	Superfície do elemento finito laminar
$b$	Carga distribuída por unidade de volume
$A$	Área do elemento finito triangular

### 61.2 - Interpolação do campo de deslocamentos

Na Figura 61.1 encontra-se representado um elemento finito plano de três nós, bem como os respectivos graus de liberdade. Considera-se que a espessura do elemento finito ( $h$ ) é constante.

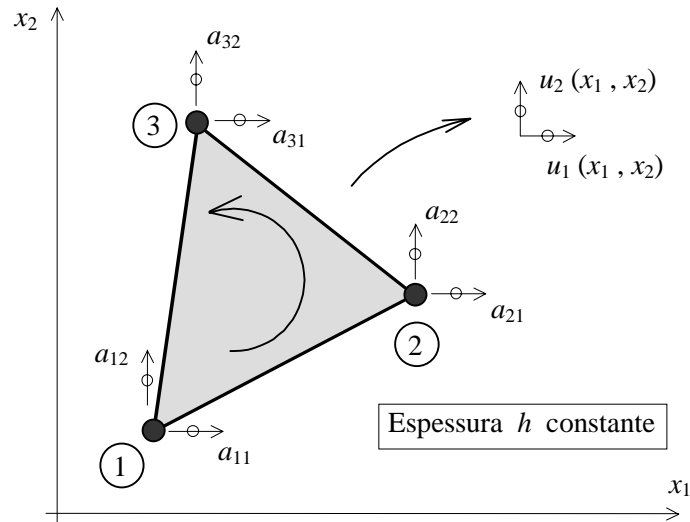


Fig. 61.1 - Elemento finito triangular de três nós.

Em cada ponto do elemento finito existe um vector deslocamento, cujas componentes dependem de  $x_1$  e de  $x_2$ .

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} \quad (1)$$

Nos nós do elemento finito, as componentes do vector deslocamento são as seguintes

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{31} \\ a_{32} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Nesta expressão,  $a_{ij}$  corresponde ao deslocamento do nó  $i$  segundo a direcção  $x_j$ .

Apresenta-se em seguida um modo aproximado de cálculo da componente  $u_1$  do campo de deslocamentos, com base nas componentes segundo  $x_1$  dos deslocamentos dos nós e com base em funções  $N_i(x_1, x_2)$ , designadas funções interpoladoras ou funções de forma.

$$u_1 = N_1(x_1, x_2) a_{11} + N_2(x_1, x_2) a_{21} + N_3(x_1, x_2) a_{31} \quad (3)$$

A interpolação da componente  $u_2$  do campo de deslocamentos é efectuada com uma expressão semelhante a (3), mas envolvendo apenas as componentes dos deslocamentos segundo  $x_2$ . Deste modo é efectuada uma interpolação separada das duas componentes do campo de deslocamentos.

Em notação matricial, (3) escreve-se

$$u_1 = [a_{11} \quad a_{21} \quad a_{31}] \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

ou

$$u_1 = \underline{a}_1^T \underline{N}_v \quad (5)$$

sendo

$$\underline{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} \quad (6)$$

e

$$\underline{N}_v = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Considerando que a componente  $u_1$  do campo de deslocamentos é uma função linear das coordenadas  $x_1$  e  $x_2$ , tem-se

$$u_1(x_1, x_2) = c_1 + c_2 x_1 + c_3 x_2 \quad (8)$$

que em notação matricial se escreve

$$u_1 = [c_1 \quad c_2 \quad c_3] \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

ou

$$u_1 = \underline{c}^T \underline{V} \quad (10)$$

sendo

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad (11)$$

e

$$\underline{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Ao efectuar em (9) a substituição das variáveis  $x_1$  e  $x_2$  pelas coordenadas do nó 1, pretende-se obter o valor do deslocamento horizontal nesse nó ( $a_{11}$ )

$$a_{11} = [c_1 \quad c_2 \quad c_3] \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{x}_{11} \\ \bar{x}_{12} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Nesta expressão,  $\bar{x}_{ij}$  corresponde à coordenada cartesiana do nó  $i$  segundo a direcção  $x_j$ .

Procedendo de igual forma com os restantes nós e agrupando as três expressões do tipo (13) numa única expressão matricial, resulta

$$[a_{11} \quad a_{21} \quad a_{31}] = [c_1 \quad c_2 \quad c_3] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \bar{x}_{11} & \bar{x}_{21} & \bar{x}_{31} \\ \bar{x}_{12} & \bar{x}_{22} & \bar{x}_{32} \end{bmatrix} \quad (14)$$

ou

$$\underline{a}_1^T = \underline{c}^T \underline{Q} \quad (15)$$

sendo  $\underline{a}_1$  definido em (6) e

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \bar{x}_{11} & \bar{x}_{21} & \bar{x}_{31} \\ \bar{x}_{12} & \bar{x}_{22} & \bar{x}_{32} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Uma vez que a matriz  $\underline{Q}$  é quadrada e se supõe não singular, pode-se multiplicar, à direita, ambos os membros de (15) por  $\underline{Q}^{-1}$ , resultando

$$\underline{c}^T = \underline{a}_1^T \underline{Q}^{-1} \quad (17)$$

Substituindo (17) em (10), resulta

$$u_1 = \underline{a}_1^T \underline{Q}^{-1} \underline{V} \quad (18)$$

Uma vez que são iguais os segundos membros de (5) e (18), e uma vez que o vector de deslocamentos nodais  $\underline{a}_1$  é arbitrário, conclui-se que

$$\underline{N}_V = \underline{Q}^{-1} \underline{V} \quad (19)$$

No caso do elemento finito da Figura 61.1, a inversa da matriz  $\underline{Q}$  (16) é

$$\underline{Q}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \bar{x}_{21} \bar{x}_{32} - \bar{x}_{22} \bar{x}_{31} & \bar{x}_{22} - \bar{x}_{32} & \bar{x}_{31} - \bar{x}_{21} \\ \bar{x}_{12} \bar{x}_{31} - \bar{x}_{11} \bar{x}_{32} & \bar{x}_{32} - \bar{x}_{12} & \bar{x}_{11} - \bar{x}_{31} \\ \bar{x}_{11} \bar{x}_{22} - \bar{x}_{12} \bar{x}_{21} & \bar{x}_{12} - \bar{x}_{22} & \bar{x}_{21} - \bar{x}_{11} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$(\Delta = \bar{x}_{21} \bar{x}_{32} - \bar{x}_{22} \bar{x}_{31} - \bar{x}_{11} \bar{x}_{32} + \bar{x}_{12} \bar{x}_{31} + \bar{x}_{11} \bar{x}_{22} - \bar{x}_{12} \bar{x}_{21})$$

Designando por  $q_{ij}$  os elementos de  $\underline{Q}^{-1}$ , tem-se

$$\underline{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Atendendo a (19), (21) e (12), resulta a seguinte expressão para o vector  $\underline{N}_V$

$$\underline{N}_V = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

De acordo com (7), as funções de forma são

$$N_1(x_1, x_2) = q_{11} + q_{12} x_1 + q_{13} x_2 \quad (23)$$

$$N_2(x_1, x_2) = q_{21} + q_{22} x_1 + q_{23} x_2 \quad (24)$$

$$N_3(x_1, x_2) = q_{31} + q_{32} x_1 + q_{33} x_2 \quad (25)$$

A interpolação da componente  $u_2$  do campo de deslocamentos é efectuada de um modo semelhante e independente da componente  $u_1$ , sendo, tal como em (3)

$$u_2 = N_1(x_1, x_2) a_{12} + N_2(x_1, x_2) a_{22} + N_3(x_1, x_2) a_{32} \quad (26)$$

Reunindo (3) e (26) numa única equação matricial, resulta

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{31} \\ a_{32} \end{bmatrix} \quad (27)$$

O vector  $\underline{a}$  já tinha sido definido em (2) e a matriz  $\underline{N}$  é a seguinte

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (28)$$

A equação (27) pode escrever-se do seguinte modo mais compacto

$$\begin{matrix} \underline{u} \\ (m \times 1) \end{matrix} = \begin{matrix} \underline{N} \\ (m \times p) \end{matrix} \begin{matrix} \underline{a} \\ (p \times 1) \end{matrix} \quad (29)$$



Nesta equação,  $m$  é o número de direcções consideradas e  $p$  é o número de graus de liberdade do elemento finito. O parâmetro  $p$  é igual a  $n \times m$ , sendo  $n$  o número de nós do elemento finito. No caso do elemento finito da Figura 61.1,  $m = 2$ ,  $n = 3$  e  $p = 6$ .

O método de determinação das funções de forma (23)-(25) coincide com o procedimento genérico que se encontra descrito em [61.1].

### 61.3 - Campo de deformações

O campo de deformações num estado plano de tensão é definido do seguinte modo [61.2]

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

ou de um modo mais compacto

$$\underline{\varepsilon} = \underline{L} \underline{u} \quad (31)$$

$(q \times 1)$        $(q \times m)$     $(m \times 1)$

Em (31),  $q$  é o número de componentes do vector  $\underline{\varepsilon}$ , que são neste caso três, e  $\underline{L}$  é o seguinte operador diferencial

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (32)$$

Substituindo (29) em (31), tem-se

$$\underline{\varepsilon} = \underline{L} \underline{N} \underline{a} \quad (33)$$

$(q \times 1)$        $(q \times m)$     $(m \times p)$     $(p \times 1)$

Designando por  $\underline{B}$  o produto  $\underline{L} \underline{N}$

$$\underline{B} = \underline{L} \underline{N} \quad (34)$$

$(q \times p)$      $(q \times m)$   $(m \times p)$

a expressão (33) passa a

$$\underline{\varepsilon} = \underline{B} \underline{a} \quad (35)$$

$(q \times 1)$      $(q \times p)$   $(p \times 1)$

sendo, de acordo com (34), (32) e (28)

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \left[ \begin{array}{cc|cc|cc} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{array} \right] \quad (36)$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} & \frac{\partial N_3}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (37)$$

No caso do elemento finito da Figura 61.1, a matriz  $\underline{B}$  é constituída pelas derivadas de (23)-(25), de acordo com (37)

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} q_{12} & 0 & q_{22} & 0 & q_{32} & 0 \\ 0 & q_{13} & 0 & q_{23} & 0 & q_{33} \\ q_{13} & q_{12} & q_{23} & q_{22} & q_{33} & q_{32} \end{bmatrix} \quad (38)$$

De acordo com (21), os  $q_{ij}$  são os elementos da matriz  $\underline{Q}^{-1}$ .

Uma vez que os elementos de  $\underline{Q}$  (16) são constantes, i.e., não dependem de  $x_1$  nem de  $x_2$ , conclui-se que os elementos de  $\underline{Q}^{-1}$  e de  $\underline{B}$  também são constantes. Atendendo a (35), verifica-se que, para um determinado conjunto de deslocamentos nodais  $\underline{a}$ , a deformação é constante em qualquer ponto de um elemento finito triangular de três nós

formulado nestas condições. Atendendo à relação entre tensões e deformações  $\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon}$  (ver a Secção 61.4), e uma vez que se considera que a matriz de elasticidade  $\underline{D}$  é constante, conclui-se que o estado de tensão no interior do elemento também é constante.

#### 61.4 - Campo de tensões

No caso do estado plano de tensão em materiais isotrópicos, é a seguinte a relação entre o campo de tensões e o campo de deformações [61.2]

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (39)$$

ou de um modo mais compacto

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon} \quad (40)$$

sendo a matriz de elasticidade  $\underline{D}$  a seguinte

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (41)$$

A matriz de elasticidade  $\underline{D}$  depende do módulo de Young ( $E$ ) e do coeficiente de Poisson ( $\nu$ ).

#### 61.5 - Matriz de rigidez

Atendendo ao que foi exposto em [61.1], é a seguinte a expressão genérica da matriz de rigidez de um elemento finito

$$\underline{K} = \int_V \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dV \quad (42)$$

Esta matriz é a que figura na relação  $\underline{K} \underline{a} = \underline{F}$ , sendo  $\underline{a}$  o vector dos deslocamentos nos nós do elemento finito e  $\underline{F}$  o vector das forças nodais equivalentes às acções exteriores que actuam nesse elemento finito.

A formulação do elemento finito representado na Figura 61.1 corresponde a um estado plano de tensão, sendo

$$dV = h dS \quad (43)$$

Nesta expressão,  $h$  é a espessura do elemento, suposta constante, e  $dS$  representa um elemento infinitesimal de superfície. Substituindo (43) em (42) e adaptando o domínio de integração, resulta

$$\underline{K} = \int_S \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} h dS \quad (44)$$

Nas condições da presente formulação, a espessura do elemento ( $h$ ) e as matrizes  $\underline{B}$  (38) e  $\underline{D}$  (41) são constantes, o que faz com que a função integranda de (44) seja constante. Designando por  $A$  a área do elemento finito representado na Figura 61.1, a expressão da sua matriz de rigidez passa a ser

$$\underline{K} = \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} h A \quad (45)$$

É possível demonstrar que a área de um triângulo definido por três pontos, cujas coordenadas cartesianas são os  $\bar{x}_{ij}$ , é metade do valor do parâmetro  $\Delta$  definido em (20).

Assim, a expressão de  $\underline{K}$  passa a ser a seguinte

$$\underline{K} = \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} h \frac{\Delta}{2} \quad (46)$$

### 61.6 - Forças nodais equivalentes a uma força de volume

Atendendo ao que foi exposto em [61.1], é a seguinte a expressão do vector das forças nodais equivalentes a uma força de volume  $\underline{b}$

$$\underline{F}^b = \int_V \underline{N}^T \underline{b} dV \quad (47)$$

No caso do estado plano de tensão com espessura  $h$  constante, tem-se

$$\underline{F}^b = \int_S \underline{N}^T \underline{b} h dS \quad (48)$$

O vector que representa as forças de volume ( $\underline{b}$ ) possui apenas duas componentes, que correspondem às forças por unidade de volume segundo  $x_1$  e segundo  $x_2$  (ver a Figura 61.2).

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (49)$$

Admite-se que as componentes de  $\underline{b}$  são constantes.

As considerações que se seguem referem-se ao elemento finito representado na Figura 61.1, cujas forças nodais equivalentes estão indicadas na Figura 61.2.

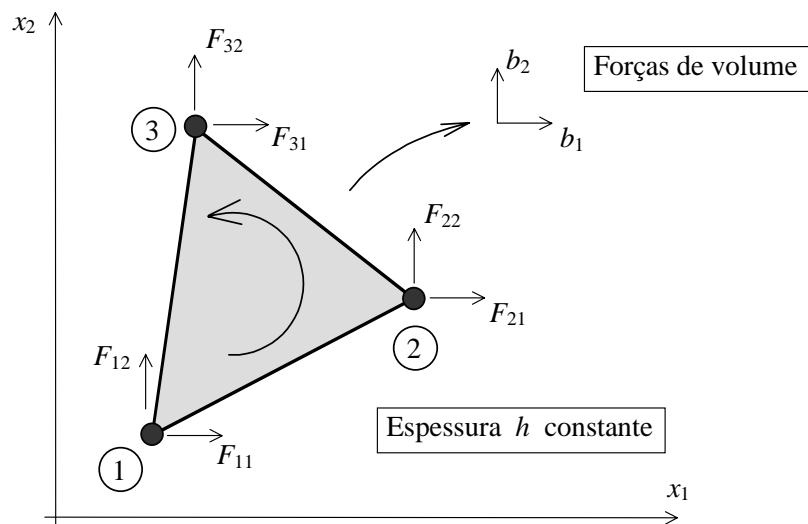


Fig. 61.2 - Elemento finito triangular de três nós - forças nodais equivalentes.

Atendendo a (28) e a (49), (48) passa a escrever-se

$$\begin{bmatrix} F_{11}^b \\ F_{12}^b \\ F_{21}^b \\ F_{22}^b \\ F_{31}^b \\ F_{32}^b \end{bmatrix} = h \int_S \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} dS \quad (50)$$

Efectuando o produto matricial correspondente à função integranda, resulta

$$\begin{bmatrix} F_{11}^b \\ F_{12}^b \\ F_{21}^b \\ F_{22}^b \\ F_{31}^b \\ F_{32}^b \end{bmatrix} = h \int_S \begin{bmatrix} N_1 b_1 \\ N_1 b_2 \\ N_2 b_1 \\ N_2 b_2 \\ N_3 b_1 \\ N_3 b_2 \end{bmatrix} dS \quad (51)$$

Procede-se em seguida apenas ao cálculo da primeira componente do vector  $\underline{F}^b$ .

$$F_{11}^b = h \int_S N_1 b_1 dS \quad (52)$$

Uma vez que se supõe que as forças de volume ( $\underline{b}$ ) são constantes, passa a ter-se

$$F_{11}^b = h b_1 \int_S N_1 dS \quad (53)$$

Substituindo (23) em (53), resulta

$$F_{11}^b = h b_1 \int_S (q_{11} + q_{12} x_1 + q_{13} x_2) dS \quad (54)$$

Atendendo ao facto de os  $q_{ij}$  serem constantes, chega-se a

$$F_{11}^b = h b_1 \left( q_{11} \int_S dS + q_{12} \int_S x_1 dS + q_{13} \int_S x_2 dS \right) \quad (55)$$

Nesta expressão, tem-se

$$\int_S dS = A \quad (56)$$

sendo  $A$  a área do elemento finito triangular representado na Figura 61.2.

Seleccionando um referencial  $(x_1, x_2)$  baricêntrico, os momentos estáticos que figuram em (55) são nulos

$$\int_S x_1 dS = 0 \quad (57)$$

$$\int_S x_2 dS = 0 \quad (58)$$

Atendendo a (20) e (21) tem-se

$$q_{11} = \frac{\bar{x}_{21} \bar{x}_{32} - \bar{x}_{22} \bar{x}_{31}}{\bar{x}_{21} \bar{x}_{32} - \bar{x}_{22} \bar{x}_{31} - \bar{x}_{11} \bar{x}_{32} + \bar{x}_{12} \bar{x}_{31} + \bar{x}_{11} \bar{x}_{22} - \bar{x}_{12} \bar{x}_{21}} \quad (59)$$

Quando o referencial  $(x_1, x_2)$  é baricêntrico, é possível demonstrar que o segundo membro de (59) é sempre igual a  $1/3$

$$q_{11} = 1/3 \quad (60)$$

Após estas considerações, (55) passa a escrever-se

$$F_{11}^b = A h b_1 / 3 \quad (61)$$

As restantes componentes do vector  $\underline{F}$  seriam deduzidas de um modo semelhante, chegando-se a

$$\begin{bmatrix} F_{11}^b \\ F_{12}^b \\ F_{21}^b \\ F_{22}^b \\ F_{31}^b \\ F_{32}^b \end{bmatrix} = \frac{A h}{3} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (62)$$

### 61.7 - Considerações finais

A formulação aqui apresentada resulta muito simples devido ao facto de se ter considerado um estado plano de tensão de espessura constante, constituído por um

material homogéneo e isotrópico. Para além destas simplificações, foram também consideradas forças de volume constantes. No caso dos elementos finitos triangulares com mais de três nós ou sempre que não se verifiquem as simplificações aqui consideradas, os integrais (44) e (48) deixam de ser fáceis de calcular. Nesses casos torna-se necessário calcular os referidos integrais com base em coordenadas de área ou por integração numérica [61.3].

As restantes operações associadas a uma análise por elementos finitos, tais com a montagem, introdução das condições de apoio, etc. encontram-se descritas em [61.1].

## **BIBLIOGRAFIA**

[61.1] - Azevedo, A. F. M. - Método dos Elementos Finitos, 1ª Edição, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Abril 2003.

[http://www.alvaroazevedo.com/publications/books/Livro\\_MEF\\_AA\\_1ed](http://www.alvaroazevedo.com/publications/books/Livro_MEF_AA_1ed)

[61.2] - Azevedo, A. F. M. - Mecânica dos Sólidos, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1996.

[http://www.alvaroazevedo.com/publications/books/Livro\\_MS\\_AA\\_1ed/MS.pdf](http://www.alvaroazevedo.com/publications/books/Livro_MS_AA_1ed/MS.pdf)

[61.3] - Cook, R. D.; Malkus, D. S.; Plesha, M. E.; Witt, R. J. - Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Fourth Edition, John Wiley & Sons, Inc., 2002.