OPTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS

Alvaro F. M. Azevedo

Email: alvaro@fe.up.pt

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

OBJECTIVO

Minimizar o custo de uma solução estrutural

As restrições são os requisitos de:

- Segurança
- Comportamento
- Durabilidade
- Conforto
- Estética, etc.

EXEMPLO

Minimizar o custo de uma ponte

Atendendo às seguintes restrições:

- Suportar as sobrecargas (veículos/peões)
- Resistir a acções excepcionais (vento/sismo)
- Não apresentar excessivas deformações
- Não vibrar demasiado para não causar desconforto
- Constituir uma solução esteticamente equilibrada

Restrições relativas à modelação do comportamento da estrutura

- Equações de equilíbrio de forças
- Equações de compatibilidade de deslocamentos
- Relações entre “forças” e “deslocamentos”
- Condições fronteira

Variáveis

- Deslocamentos em pontos críticos
- Tensões em secções críticas
- Coordenadas de pontos que condicionam a geometria
- Espessuras de componentes laminares
- Dimensões da secção de componentes prismáticos

PROGRAMA MATEMÁTICO

Caso geral

- Variáveis contínuas (comportamento/geometria)
- Variáveis discretas (secções disponíveis no mercado)
- Funções não lineares, nalguns casos descontínuas

Situações abordadas no presente trabalho

- Todas as variáveis são reais e contínuas
- As funções são, ou podem ser aproximadas por polinómios generalizados

Ex: $f(\underset{\sim}{x}) = 5.9x_1^2x_4^{-3} - 3.1x_2 + 2.7x_1^{-1}x_3x_5^2 - 1.8$

PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR

$$\mathit{Minimizar}\ \ f(\underset{\sim}{x})$$

$$\mathit{sujeita\ a}$$

$$\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x}) \leq \underset{\sim}{0} \qquad \rightarrow \qquad g_i(\underset{\sim}{x}) + s_i^2 = 0$$

$$\underset{\sim}{h}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{0}$$

Todas as funções são do tipo:

$$f(\underset{\sim}{x}) = 5.9\, x_1^2 x_4^{-3} - 3.1 x_2 + 2.7\, x_1^{-1} x_3 x_5^2 - 1.8$$

- São facilmente derivadas recorrendo a programação simbólica
- Da derivação resulta uma função do mesmo tipo
- Fácil de avaliar para uma dada solução $\underset{\sim}{x}$

Lagrangeano: $L\left(\underset{\sim}{X}\right) = f\left(\underset{\sim}{x}\right) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^g \left[g_k\left(\underset{\sim}{x}\right) + s_k^2 \right] + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^h h_k\left(\underset{\sim}{x}\right)$

Variáveis: $\underset{\sim}{X} = \left(\underset{\sim}{s}, \underset{\sim}{\lambda}^g, \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{\lambda}^h\right)$

$\underset{\sim}{x} \rightarrow$ variáveis do problema - sem restrição de sinal

$\underset{\sim}{s} \rightarrow$ variáveis de desvio - sem restrição de sinal (s^2 é positivo)

$\underset{\sim}{\lambda}^g \rightarrow$ mult. Lagr. das restr. desigualdade - têm de ser positivos

$\underset{\sim}{\lambda}^h \rightarrow$ mult. Lagr. das restr. igualdade - sem restrição de sinal

A solução do programa matemático é um ponto estacionário do Lagrangeano

O ponto estacionário do Lagrangeano é uma das soluções do seguinte sistema de equações não lineares:

$$\nabla L\left(\underset{\sim}{X}\right) = \underset{\sim}{0} \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{array}{ll} 2 s_i \lambda_i^g = 0 & (i = 1, \ldots, m) \\ g_i + s_i^2 = 0 & (i = 1, \ldots, m) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^g \dfrac{\partial g_k}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^h \dfrac{\partial h_k}{\partial x_i} = 0 & (i = 1, \ldots, n) \\ h_i = 0 & (i = 1, \ldots, p) \end{array}\right.$$

Uma solução deste sistema respeita as condições KKT desde que todos os $\underset{\sim}{\lambda}^g$ sejam positivos

Método de Lagrange-Newton

- Aplicação do método de Newton à resolução do sistema

$$\nabla L(\underset{\sim}{X}) = \underset{\sim}{0}$$

- Em cada iteração há que resolver um sistema de eq. lineares

$$\underset{\sim}{H}\left(\underset{\sim}{X}^{q-1}\right) \Delta \underset{\sim}{X}^{q} + \nabla L\left(\underset{\sim}{X}^{q-1}\right) = \underset{\sim}{0}$$

- A actualização da solução depende de um parâmetro de pesquisa unidimensional (α)

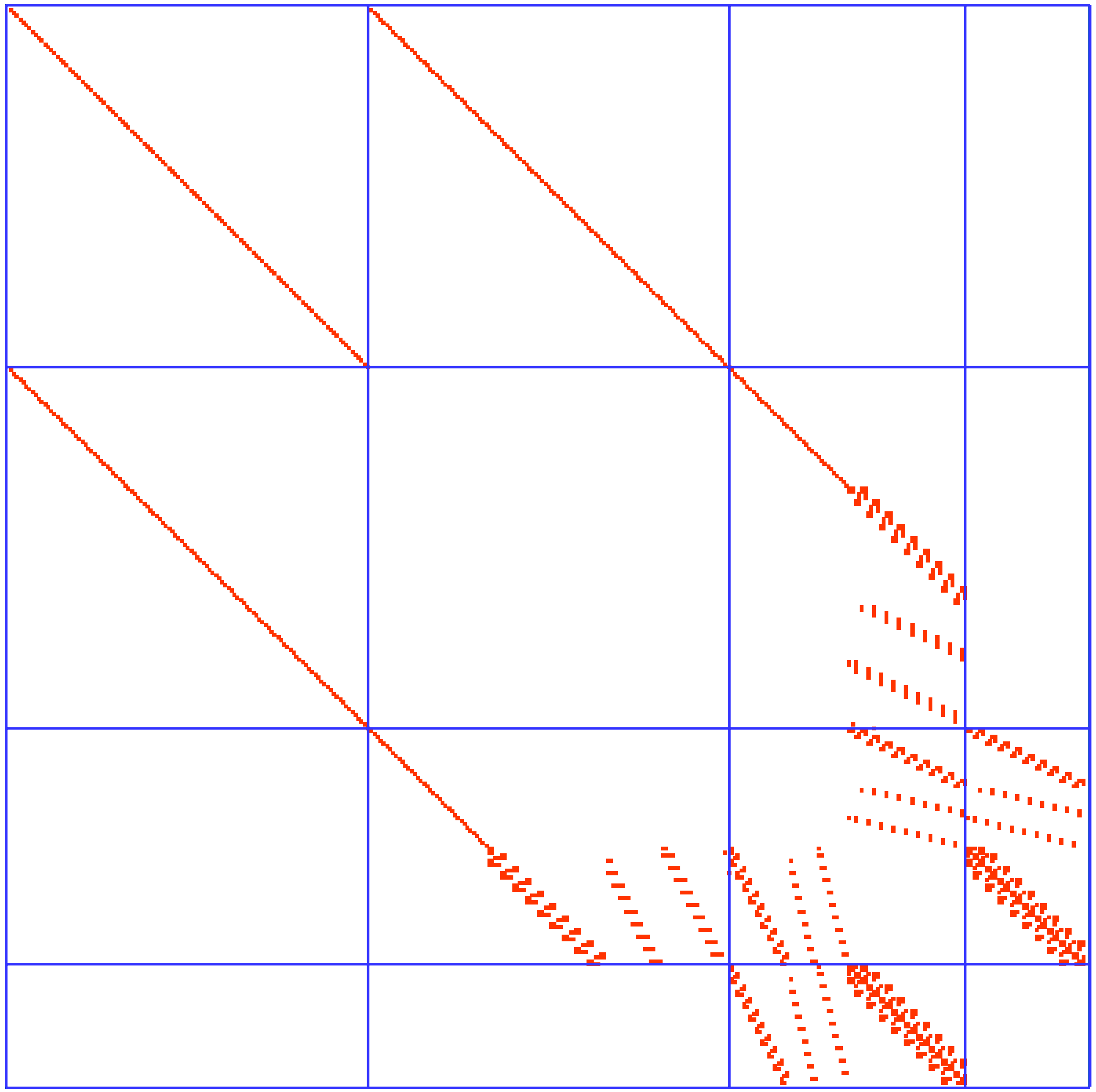
$$\underset{\sim}{X}^{q} = \underset{\sim}{X}^{q-1} + \alpha \, \Delta \underset{\sim}{X}^{q}$$

Matriz Hessiana

$$
\underset{\sim}{H} = \begin{array}{c} \\ (m) \\ (m) \\ (n) \\ (p) \end{array}
\begin{array}{cccc}
(m) & (m) & (n) & (p) \\
\hline
\multicolumn{1}{|c|}{Diag\left(2\lambda_i^g\right)} & \multicolumn{1}{c|}{Diag\left(2s_i\right)} & \multicolumn{1}{c|}{\underset{\sim}{0}} & \multicolumn{1}{c|}{\underset{\sim}{0}} \\
\hline
\multicolumn{1}{|c}{} & \multicolumn{1}{|c|}{\underset{\sim}{0}} & \multicolumn{1}{c|}{\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}} & \multicolumn{1}{c|}{\underset{\sim}{0}} \\
\cline{2-4}
\multicolumn{1}{|c}{} & & \multicolumn{1}{|c|}{*} & \multicolumn{1}{c|}{\dfrac{\partial h_j}{\partial x_i}} \\
\cline{3-4}
\multicolumn{3}{|c|}{S\,I\,M\,E\,T\,R\,I\,C\,A} & \multicolumn{1}{c|}{\underset{\sim}{0}} \\
\hline
\end{array}
$$

$$
* \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^g \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^h \frac{\partial^2 h_k}{\partial x_i \partial x_j}
$$

Padrão de esparsidade da matriz Hessiana



Resolução do sistema de equações lineares

- Método directo - eliminação de Gauss

  - adaptado à esparsidade específica da Hessiana

  - uma vez que a Hessiana é indefinida, tem de se evitar as divisões por zero

- Método iterativo - gradientes conjugados

$$\underset{\sim}{H}^T \cdot \underset{\sim}{H} \cdot \Delta \underset{\sim}{X} + \underset{\sim}{H}^T \cdot \nabla L = \underset{\sim}{0}$$

  - a matriz dos coeficientes passa a ser positiva definida, mas o *condition number* aumenta muito

Comparação das características dos dois métodos

- Eliminação de Gauss
  - mais rápido
  - mais fiável
  - quantidade de memória utilizada cresce rapidamente com o número de variáveis

- Gradientes conjugados
  - requer um exagerado número de iterações !
  - muito lento quando o número de variáveis é elevado
  - requer muito pouca memória
  - permite resolver problemas em que a Hessiana é singular

Características do programa NEWTOP

- *Scaling* automático das variáveis $\underset{\sim}{x}$ e $\underset{\sim}{s}$

$$x_i = Z_i \, \bar{x}_i$$

- Normalização das restrições

  - gradientes unitários para a solução inicial

- Substituição automática de restrições elementares

$$x_i = c \, x_j \qquad \text{ou} \qquad x_i = c$$

(o número de variáveis e o número de restrições diminui)

É possível converter a solução do programa matemático modificado na solução da versão inicial

Características do programa NEWTOP (cont.)

- Linguagem de programação ⇨ ANSI C

- Excerto de um ficheiro de dados:

```
### Main title of the nonlinear program
      Symmetric truss with two load cases (kN,cm)
Min.
    +565.685 * t5 ^ 2 + 100 * t8 ^2 ; # truss volume (cm3)

s.t.i.c.
    Min. area 4:    - t4 ^ 2 + 0.15 < 0 ;

s.t.e.c.
    Equil 16:  + 141.421 * t5 ^ 2 * disp16 - 100 = 0 ;

END_OF_FILE
```

EXEMPLO COM UM ELEVADO NÚMERO DE VARIÁVEIS

Minimizar o custo de uma estrutura reticulada tridimensional

- Número de variáveis independentes = 4 096
- Número de variáveis dependentes = 3 135
- Número total de variáveis $(\underset{\sim}{x})$ = 7 231
- Número de restrições desigualdade = 19 038

Tempo de resolução numa *workstation* com 256 MB RAM e cerca de 40 Mflops ⇨ 3 a 4 dias

NEWTOP: comparação com a programação linear, quadrática, geométrica, etc.

Vantagens:

- Campo de aplicação mais amplo

Desvantagens:

- Menos eficiente
- Menos robusto
- Variáveis reais e contínuas
- Necessita de uma “boa” solução inicial

NEWTOP: comparação com a programação não linear tradicional

Vantagens:

- Mais preciso (segunda ordem)
- Aborda problemas com um elevado número de variáveis
- Mais eficiente ?
- Mais robusto ?
- Mais fiável na detecção do mínimo global ???

Desvantagens:

- Campo de aplicação mais restrito